Corrigés des TD en plus du chapitre 4

Exercice 1

Posons $g(x)=x+\ln(1-x)$.

La fonction g est dérivable sur $[0,1[$ en tant que somme de telles fonctions et pour tout $x\in[0,1[$:

$$g'(x)=1-\frac{1}{1-x}=-\frac{x}{1-x}\leq 0.$$

Ainsi, g est décroissante sur $[0,1[$.

Pour tout entier $n\geq 2$ et tout $t\in[0,1]$, on a $\frac{t}{n},\frac{1}{n}\in[0,1[$ et $0\leq\frac{t}{n}\leq\frac{1}{n}$, donc :

$$g\left(\frac{1}{n}\right)\leq g\left(\frac{t}{n}\right)\leq g(0) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\leq\frac{t}{n}+\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq 0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\leq e^{\frac{t}{n}+\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}=e^{\frac{t}{n}}\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq 1.$$

Comme $e^{\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}>0$, en élevant à la puissance n, on obtient pour tout $t\in[0,1]$:

$$e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\leq e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq 1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\leq a_n=1-e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}.$$

Donc, pour tout $x\in[0,1]$:

$$0\leq\int_0^x\left[1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]dt\leq\int_0^x a_n\,dt.$$

Or, $\int_0^x a_n\,dt=a_n x\leq a_n$ et :

$$\int_0^x\left[1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]dt=\int_0^x dt-\int_0^x e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}dt=x-f_n(x).$$

On obtient alors pour tout $x\in[0,1]$:

$$\left|f_n(x)-x\right|=x-f_n(x)\leq a_n.$$

D'où :

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-x\right|\leq a_n.$$

Enfin, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}e^{1+n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}e^{1+n\left[-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\lim_{n\to+\infty}e^{o(1)}=1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } x\mapsto x.}$$

Exercice 2

Posons $g=|f|$. On a $f\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, *f* est non nulle et $f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc $g\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, *g* est non nulle et $g(0)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

Comme *g* n'est pas nulle, il existe $a\in\mathbb{R}_+$ tel que $f(a)\neq 0$, soit $|f(a)|>0$.

- *g* est continue en 0 avec $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$, donc il existe $x_0\geq 0$ tel que pour tout $x\in[0,x_0]$:
$$g(x)\leq\frac{1}{2}g(a).$$
- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, donc il existe $x_1\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in[x_1,+\infty[$:
$$g(x)\leq\frac{1}{2}g(a).$$

Alors, pour tout $x\in[0,x_0]\cup[x_1,+\infty[$, $g(x)\leq\frac{1}{2}g(a)$, donc $g(x)\neq g(a)$ et $a\notin[0,x_0]\cup[x_1,+\infty[$. Ceci permet de conclure que $x_0<x_1$ et $a\in[x_0,x_1]$.

La fonction *g* est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[x_0,x_1]\subset\mathbb{R}_+$, *g* admet un maximum *M* tel que $M\geq g(a)>0$. Enfin, comme $g(x)\leq\frac{1}{2}g(a)<g(a)\leq M$ pour tout $x\in[0,x_0]\cup[x_1,+\infty[$, on a :
$$M=\max_{\mathbb{R}_+} g=\max_{\mathbb{R}_+}|f|.$$

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0)=g_n(0)=f(0)=0$, donc $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} nx=+\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx)=\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)=0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x}{n}=0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)=\lim\limits_{X\to 0} f(0)=f(0)=0$ (ca *f* est continue en 0).

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=0$ et donc :

$$\boxed{\text{Les suites } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent simplement vers la fonction nulle.}}$$

Mais, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, nx et $\frac{x}{n}$ décrivent $\mathbb{R}_+$ quand *x* décrit $\mathbb{R}_+$, donc :
$$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f(nx)|=\sup_{X\in\mathbb{R}_+}|f(X)|=\max_{X\in\mathbb{R}_+}|f(X)|=M$$
$$\|g_n\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|g_n(x)|=\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|=\sup_{X\in\mathbb{R}_+}|f(X)|=\max_{X\in\mathbb{R}_+}|f(X)|=M$$

Donc, les suites $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définies mais ne convergent pas vers 0, et ainsi :

$$\boxed{\text{Les suites } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne convergent pas uniformément vers la fonction nulle.}}$$

2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existe $(\alpha, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $t \in [0,\alpha] \cup [A,+\infty[$, $|f(t)| \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N = E\left(\dfrac{A}{\alpha}\right) + 1 > \dfrac{A}{\alpha}$ (donc $n\alpha > A$). Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

- si $x \leq \alpha$, alors $\dfrac{x}{n} \leq x \leq \alpha$, donc $|f_n(x) g_n(x)| = |f(nx)| \left| f\left(\dfrac{x}{n}\right) \right| \leq M\varepsilon$;
- si $x > \alpha$, alors $nx > n\alpha > A$, donc $|f_n(x) g_n(x)| = |f(nx)| \left| f\left(\dfrac{x}{n}\right) \right| \leq \varepsilon M$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x) g_n(x)| \leq M\varepsilon$.

Ceci prouve que $\lim_{n \to +\infty} \|f_n g_n\|_\infty = 0$, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n g_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+ \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Exercice 3

On pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $|f_n(x)| = f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+ .}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(x) = -\dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $f_n''(x) = e^{-nx}$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a :

$$|f_n'(x)| = \frac{e^{-nx}}{n} \leq e^{-na} \quad \text{et} \quad |f_n''(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} .$$

Comme la série géométrique $\sum e^{-na}$ converge (car de raison $e^{-a} \in]0,1[$), les séries $\sum f_n'$ et $\sum f_n''$ convergent normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Alors, f est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* .}$$

2) On a $f(0) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{e^{-nx} - 1}{nx} .$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$-t \le e^{-t} - 1 \le -t + \frac{t^2}{2} \quad \textbf{(1)}.$$

En effet, si on pose $h(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2}$, la fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $h'(t) = -e^{-t} + 1 - t$ et $h''(t) = e^{-t} - 1 \le 0$.

Donc, h' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h'(0) = 0$, ce qui permet de conclure que $h'(t) = -e^{-t} + 1 - t \le 0$, soit :

$$-t \le e^{-t} - 1.$$

Alors, h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(0) = 0$, donc $h(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2} \le 0$, soit :

$$e^{-t} - 1 \le -t + \frac{t^2}{2}.$$

A l'aide de **(1)**, on peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{n}\frac{e^{-nx} - 1}{nx} \le -\frac{1}{n} + \frac{x}{2}.$$

Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\frac{e^{-nx} - 1}{nx} \le -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + N\frac{x}{2}.$$

Enfin, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{n}\frac{e^{-nx} - 1}{nx} \le 0$, on a :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{-nx} - 1}{nx} \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\frac{e^{-nx} - 1}{nx}.$$

Et, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \le -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + N\frac{x}{2}.$$

Or, $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = +\infty$ (la série harmonique diverge), donc pour tout réel $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \ge A + 1.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \le \alpha = \frac{2}{N}$, soit $N\frac{x}{2} \le 1$, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \le -A - 1 + 1 = -A.$$

Ainsi, pour tout réel $A > 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x \le \alpha$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} \le -A$.

Ceci prouve que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ et donc que :

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

3) D'après la question 1, *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} .$$

Et, f' étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \int^x f''(t)\,dt + K = \int^x \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt + K = \ln(1-e^{-x}) + K$$

Toujours d'après la question 1, $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-nx}}{n}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n'(x) = 0 .$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1-e^{-x}) + K\right] = K$, donc $K = 0$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f''(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \quad \text{et} \quad f'(x) = \ln(1-e^{-x}) .}$$

Comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on a immédiatement pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,dt$, soit :

$$\boxed{f(x) = f(1) + \int_1^x \ln(1-e^{-t})\,dt}$$

Exercice 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n et définie sur $\mathbb{R}$ et :

- $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$, donc $\sum f_n(x)$ converge (car la série $\sum \dfrac{1}{n^2 x}$ est à termes de signe constant et convergente).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R} .}$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $g_x : t \mapsto \dfrac{x}{t(1+tx^2)}$. La fonction g_x est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on peut donc utiliser la comparaison série intégrale qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_x(n) + \int_1^n g_x(t)\,dt \le \sum_{k=1}^n g_x(k) \le g_x(1) + \int_1^n g_x(t)\,dt .$$

Avec $g_x(n) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)} = f_n(x)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(x) + \int_1^n g_x(t)\,dt = \frac{x}{n(1+nx^2)} + \int_1^n g_x(t)\,dt \le \sum_{k=1}^n f_k(x) \le f_1(x) + \int_1^n g_x(t)\,dt = \frac{x}{1+x^2} + \int_1^n g_x(t)\,dt .$$

Et :

$$\int_1^n g_x(t)\,dt = \int_1^n \frac{x}{t(1+tx^2)}\,dt = x\int_1^n \left[\frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}\right]dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx^2}\right)\right]_1^n$$

$$= \ln\left(\frac{n}{1+nx^2}\right) - \ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \ln(1+x^2) - \ln\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n g_x(t)\,dt = \ln(1+x^2) - 2\ln x$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n(1+nx^2)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = f(x)$, on obtient :

$$\ln(1+x^2) - 2\ln x \le f(x) \le \frac{x}{1+x^2} + \ln(1+x^2) - 2\ln x\,.$$

Soit, pour $0 < x < 1$:

$$1 - \frac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} \le \frac{f(x)}{-2\ln x} \le 1 - \frac{1}{2\ln x}\left(\frac{x}{1+x^2} + \ln(1+x^2)\right).$$

Avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\ln x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\ln x}\left(\dfrac{x}{1+x^2} + \ln(1+x^2)\right) = 0$, le théorème des gendarmes donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{-2\ln x} = 1$, soit :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\ln x}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (car définie et rationnelle).

Alors, si $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors $f = \sum\limits_{n\ge 1} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$. Or :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[-2\ln x\right] = +\infty \ne 0 = f(0)\,.$$

Donc, *f* n'est pas continue en 0 et ainsi :

$$\boxed{\text{La convergence de } \sum f_n \text{ n'est pas uniforme sur } \mathbb{R}\,.}$$

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{x^2-1}}$.

Notons *D* l'ensemble maximal tel que $\sum f_n(x)$ converge pour tout *x* de *D*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, donc $\sum f_n(0)$ converge.

De plus, la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{x^2-1}}$ converge si et seulement si $x^2 - 1 > 1$, soit $x^2 > 2$, donc $\sum f_n(x)$ converge pour tout *x* de $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$ et diverge quand $x^2 \le 2$ et $x \ne 0$.

Ainsi :

$$\boxed{D = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \{0\} \cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[}$$

Soit $x\in\left]\sqrt{2},+\infty\right[$. La fonction $t\mapsto\dfrac{x}{t^{x^2-1}}$ est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on peut donc utiliser la comparaison série intégrale qui donne pour tous $n,p\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{n+p}\frac{x}{(k+1)^{x^2-1}}\le\int_n^{n+p+1}\frac{x}{t^{x^2-1}}dt\le\sum_{k=n}^{n+p}\frac{x}{k^{x^2-1}}.$$

Soit :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p+1}\frac{x}{k^{x^2-1}}\le\frac{x}{x^2-2}\left(\frac{1}{n^{x^2-2}}-\frac{x}{(n+p+1)^{x^2-2}}\right)\le\frac{x}{n^{x^2-1}}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{x}{k^{x^2-1}}.$$

Et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\le\frac{x}{x^2-2}\frac{1}{n^{x^2-2}}\le\frac{x}{n^{x^2-1}}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\quad\Rightarrow\quad\left|\sum_{k=1}^{n}f_k(x)-f(x)\right|=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)\ge\frac{x}{x^2-2}\frac{1}{n^{x^2-2}}-\frac{x}{n^{x^2-1}}.$$

Or, quand $x\to\sqrt{2}^{\,+}$, $\dfrac{x}{x^2-2}\dfrac{1}{n^{x^2-2}}-\dfrac{x}{n^{x^2-1}}\to+\infty$, donc $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k(x)-f(x)\right|$ n'est pas majoré sur $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$, donc sur D, ce qui implique immédiatement que :

$$\boxed{\text{La série }\sum f_n\text{ ne converge pas uniformément sur }D.}$$

Remarquons que D est symétrique par rapport à 0, et pour tout $x\in D$, $f(-x)=-f(x)$, donc f est impaire.

Soit $[a,b]\subset\left]\sqrt{2},+\infty\right[$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)|=\frac{|x|}{n^{x^2-1}}\le\frac{b}{n^{a^2-1}}.$$

Comme $[a,b]\subset\left]\sqrt{2},+\infty\right[$, on a $a^2-1>1$, donc $\sum\dfrac{b}{n^{a^2-1}}$ converge.

Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et, comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[a,b]$, $\sum f_n$ est continue sur $[a,b]$. Ceci étant vrai pour tout $[a,b]\subset\left]\sqrt{2},+\infty\right[$, $\sum f_n$ est continue sur $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$ et comme f est impaire :

$$\boxed{f\text{ est continue sur }D=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[.}$$

Exercice 6

1) Posons $f_n(x)=\dfrac{1}{n+n^2x}=\dfrac{1}{n(1+nx)}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$.

On a $f_n(0)=\dfrac{1}{n}$, donc $\sum f_n(0)$ diverge et pour tout $x\in\mathbb{R}^*\setminus\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2x}$ et la série $\sum\dfrac{1}{n^2x}$ est à termes de signe constant et converge, donc :

$$\boxed{\text{La fonction }f\text{ est définie sur }D=\mathbb{R}^*\setminus\left\{-\frac{1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}.}$$

Soit deux réels a et b tels que $a<b$.

- Si $0<a<b$, on a $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}_+^*\subset D$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<f_n(x)\le\dfrac{1}{n+n^2a}\le\dfrac{1}{n^2a}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2a}$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
- S'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $-\dfrac{1}{N}<a<b<-\dfrac{1}{N+1}<0$, on a $[a,b]\subset\left]-\dfrac{1}{N},-\dfrac{1}{N+1}\right[\subset D$ et, pour tout $x\in[a,b]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0<\left|f_n(x)\right|\le\min\left(\left|\dfrac{1}{n+n^2a}\right|,\left|\dfrac{1}{n+n^2b}\right|\right)\le\min\left(\dfrac{1}{n^2|a|},\dfrac{1}{n^2|b|}\right)$ et $\sum\dfrac{1}{n^2|a|}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2|b|}$ convergent, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans D, et f_n est continue sur D pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc, f est continue sur tout segment inclus dans D, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } D.}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $g_x:t\mapsto\dfrac{1}{t+t^2x}$. La fonction g_x est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, on peut donc utiliser la comparaison série intégrale qui donne pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$g_x(n)+\int_1^n g_x(t)\,dt\le\sum_{k=1}^n g_x(k)\le g_x(1)+\int_1^n g_x(t)\,dt\,.$$

Avec $g_x(n)=\dfrac{1}{n+n^2x}=f_n(x)$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n(x)+\int_1^n g_x(t)\,dt=\frac{1}{n+n^2x}+\int_1^n g_x(t)\,dt\le\sum_{k=1}^n f_k(x)\le f_1(x)+\int_1^n g_x(t)\,dt=\frac{1}{1+x}+\int_1^n g_x(t)\,dt\,.$$

Et :

$$\int_1^n g_x(t)\,dt=\int_1^n\frac{dt}{t+t^2x}=\int_1^n\left[\frac{1}{t}-\frac{x}{1+xt}\right]dt=\left[\ln t-\ln(1+xt)\right]_1^n$$
$$=\ln\left(\frac{n}{1+xn}\right)-\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)=\ln(1+x)-\ln\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n g_x(t)\,dt=\ln(1+x)-\ln x$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+n^2x}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n f_k(x)=f(x)$, on obtient :

$$\ln(1+x)-\ln x\le f(x)\le\frac{1}{1+x}+\ln(1+x)-\ln x\,.$$

Soit, pour $0<x<1$:

$$1-\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\le\frac{f(x)}{-\ln x}\le1-\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{1+x}+\ln(1+x)\right).$$

Avec $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{1}{1+x}+\ln(1+x)\right)=0$, le théorème des gendarmes donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{-\ln x}=1$, soit :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}-\ln x}$$

Quand $x \to +\infty$, on a $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 x}$, on peut alors conjecturer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2 x} = \dfrac{\pi^2}{6x}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| x f(x) - \frac{\pi^2}{6} \right| = \left| \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n+n^2 x} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \right| = \left| \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x}{n+n^2 x} - \frac{1}{n^2} \right) \right| = \left| \sum_{n\geq 1} \frac{-n}{n^2(n+n^2 x)} \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n^3 x}.$$

Et, toujours pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{n^2+n^3x} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \dfrac{1}{n^2+n^3x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+n^3x} = 0$, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \left| x f(x) - \frac{\pi^2}{6} \right| = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n^3 x} = \sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^2+n^3 x} = 0.$$

Ceci prouve que l'on a bien :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}}$$

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x > 0$, alors $f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}(e^{-nx})$ et la série géométrique $\sum e^{-nx}$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge.
- Si $x = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ et si $x < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.

Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de telles fonctions.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Posons $g_n : x \mapsto e^{-nx}$ et $h_n : x \mapsto 1+nx$. Ces deux fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $g_n^{(k)} : x \mapsto (-n)^k e^{-nx}$, $h_n' : x \mapsto n$ et $h_n^{(k)} = 0$ quand $k \geq 2$.

On a $h_n f_n = g_n$ et avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $k \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} h_n^{(i)}(x) f_n^{(k-i)}(x) = g_n^{(k)}(x) \quad \Leftrightarrow \quad (1+nx) f_n^{(k)}(x) + kn f_n^{(k-1)}(x) = (-n)^k e^{-nx}.$$

Ceci implique que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| = \left| \frac{(-n)^k}{1+nx} e^{-nx} - k \frac{n}{1+nx} f_n^{(k-1)}(x) \right| \leq n^k e^{-nx} + k \left| f_n^{(k-1)}(x) \right|.$$

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |\varphi|$.

Pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\left| f_n(x) \right| = f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+nx} \leq e^{-na}.$$

Donc, $\|f_n\|_\infty$ existe et $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2})$.

Supposons que pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\|f_n^{(k-1)}\|_\infty$ existe et $\|f_n^{(k-1)}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2})$.

Pour tout $x\in[a,+\infty[$:

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \le n^k e^{-nx} + k\left|f_n^{(k-1)}(x)\right| \le n^k e^{-na} + k\left\|f_n^{(k-1)}\right\|_\infty .$$

Donc $\|f_n^{(k)}\|_\infty$ existe et :

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \le n^k e^{-na} + k\left\|f_n^{(k-1)}\right\|_\infty .$$

Or, $n^k e^{-na} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2})$, donc avec $\|f_n^{(k-1)}\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2})$, on obtient pour tout $x\in[a,+\infty[$:

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2}).$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \text{ existe et } \left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{-na/2}).$$

Or, la série la série géométrique $\sum e^{-na/2}$ converge, donc $\sum\left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ converge et ainsi, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n\ge0} f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

Ceci prouve que *f* est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* .}$$

Exercice 8

1) Posons $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Pour tout entier $n\ge2$, la fonction f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-n\}$.

Et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-n, n\in\mathbb{N}, n\ge2\}$, $\left(|f_n(x)|\right)_{n\ge2}$ décroit à partir d'un certain rang et converge vers 0, donc la série $\sum(-1)^n|f_n(x)|$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } D=\mathbb{R}\setminus\{-n, n\in\mathbb{N}, n\ge2\}.}$$

2) Remarquons déjà que $]-1,1[\subset D$ et que pour tout entier $n\ge2$, f_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ (c'est une fonction rationnelle) avec pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\,]-1,1[$, $f_n^{(k)}(x)=(-1)^n\dfrac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}$.

On a alors pour $n\ge2$ (donc $n-1>0$) et pour $x\in\,]-1,1[$:

$$\left|f_n^{(k)}(x)\right| \le \frac{k!}{(n-1)^{k+1}} .$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{k+1}}$ converge (car $k+1\geq 2$), donc $\sum \frac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ converge et ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $]-1,1[$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$. Alors, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur $]-1,1[$.

Comme $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$, on peut conclure que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,1[.}$$

3) D'après la question précédente, on a de plus pour tout $x\in\,]-1,1[$:

$$f'(x)=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}=\sum_{p\geq 1}\left[\frac{(-1)^{2p+1}}{(x+2p)^2}+\frac{(-1)^{2p+2}}{(x+2p+1)^2}\right]=-\sum_{p\geq 1}\frac{(x+2p+1)^2-(x+2p)^2}{(x+2p)^2}.$$

Or, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]-1,1[$, on a $1<x+2p<x+2p+1$, donc $\frac{(x+2p+1)^2-(x+2p)^2}{(x+2p)^2}>0$.

Ainsi, $f'(x)<0$ et donc f est strictement décroissante sur $]-1,1[$.

De plus, comme $\sum f_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées, on a pour tout $n\geq 2$ et tout $x\in\,]-1,1[$:

$$\left|\sum_{k\geq n+1}\frac{(-1)^k}{x+k}\right|\leq\frac{1}{x+n+1}<\frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{1}{n}\to 0$, $\sum f_n$ converge uniformément sur $]-1,1[$, donc :

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n}\right)=\sum_{n\geq 2}\lim_{x\to -1^+}\frac{(-1)^n}{x+n}=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n-1}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n}\right)=\sum_{n\geq 2}\lim_{x\to 1^-}\frac{(-1)^n}{x+n}=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n\geq 3}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}-1+\frac{1}{2}=\ln 2-\frac{1}{2}$$

On obtient ainsi le tableau :

x	-1 $\qquad\qquad$ 1
f	$\ln 2$ $\searrow$ $\ln 2-0,5$

4) Soit $x\in\,]-1,1[$ fixé.

Pour tout $N\in\mathbb{N}$ et tout entier $n\geq 2$:

$$\frac{1}{x+n}=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k+\frac{1}{n}\frac{\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}}{1+\frac{x}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k+\frac{1}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}.$$

Donc :

$$f(x)=\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{x+n}=\sum_{n\geq 2}(-1)^n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N}\left(-\frac{x}{n}\right)^k+\frac{1}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}\right]=\sum_{n\geq 2}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}}x^k+\frac{(-1)^n}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}\right].$$

Or, la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et pour tout $k \geq 1$, la série $\sum \left| \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} x^k \right| = \sum \frac{|x|^k}{n^{k+1}}$ converge, donc $\sum \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} x^k$ converge absolument donc converge. Ceci implique que $\sum \frac{1}{x+n}\left(-\frac{x}{n}\right)^{N+1}$ converge, avec :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}}.$$

De plus, pour tout $x \in]-1,1[$, tout $N \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geq 2$:

$$\left| \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}} \right| = \frac{1}{x+n} \frac{|x|^{N+1}}{n^{N+1}} \leq \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} |x|^{N+1}.$$

Et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$, donc, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k \right| = \left| \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+N+1}}{x+n} \frac{x^{N+1}}{n^{N+1}} \right| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n} |x|^{N+1} = |x|^{N+1}.$$

Enfin, comme $\lim_{N \to +\infty} |x|^{N+1} = 0$ (car $|x| < 1$), le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{N \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}} \right) x^k \right| = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec $a_k = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n+k}}{n^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[.}$$