TD du chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Exercice 1

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1 f(t^n)dt$.

Après avoir justifié qu'elle est bien définie, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente. Pour tout réel *x*, on pose $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$.

Montrer que *S* est bien définie sur $\mathbb{R}$, que $I=\int_0^{+\infty}S(x)e^{-x}dx$ converge et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Exercice 3 *(Deux techniques de calcul d'intégrale)*

1) On pose $I=\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt$.
   a. Justifier que *I* est bien définie.
   b. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}$.
   c. Calculer $\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et en déduire *I*.
2) On pose $J(x)=\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$.
   a. Montrer que *J* est définie et de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et donner J'.
   b. En déduire $J(x)$ pour tout $x>-1$.

Exercice 4

Etudier $F: x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2+e^{-xt}}$.

Exercice 5

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt$.

1) Montrer que *f* est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $g(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x}dt$.

   Montrer que $g(x)=\underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.
3) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $h(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{t+x}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t+x}dt$.

   Etudier $\lim_{x\to 0}h(x)$ et en déduire un équivalent simple de $f(x)$ en 0.

Exercice 6 *(Intégrale de Gauss)*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$.

1) Montrer que pour tout *F* et *G* sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner F' et G'.
2) Montrer que la fonction $F+G$ est constante sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et en déduire l'intégrale de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
4) Calculer alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 7 *(Transformée de Laplace)*

Soit *E* l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Pour tout $f \in E$, on pose :

$$\mathscr{L}(f) : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C} \, ; \, x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \, dt .$$

1) Montrer que pour tout $f \in E$, $\mathscr{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Soit $f \in E$, donner la limite de $\mathscr{L}(f)$ en $+\infty$.
3) Vérifier que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en une fonction *g* de *E*.
   Calculer $\mathscr{L}(g)'$ et en déduire $\mathscr{L}(g)$.

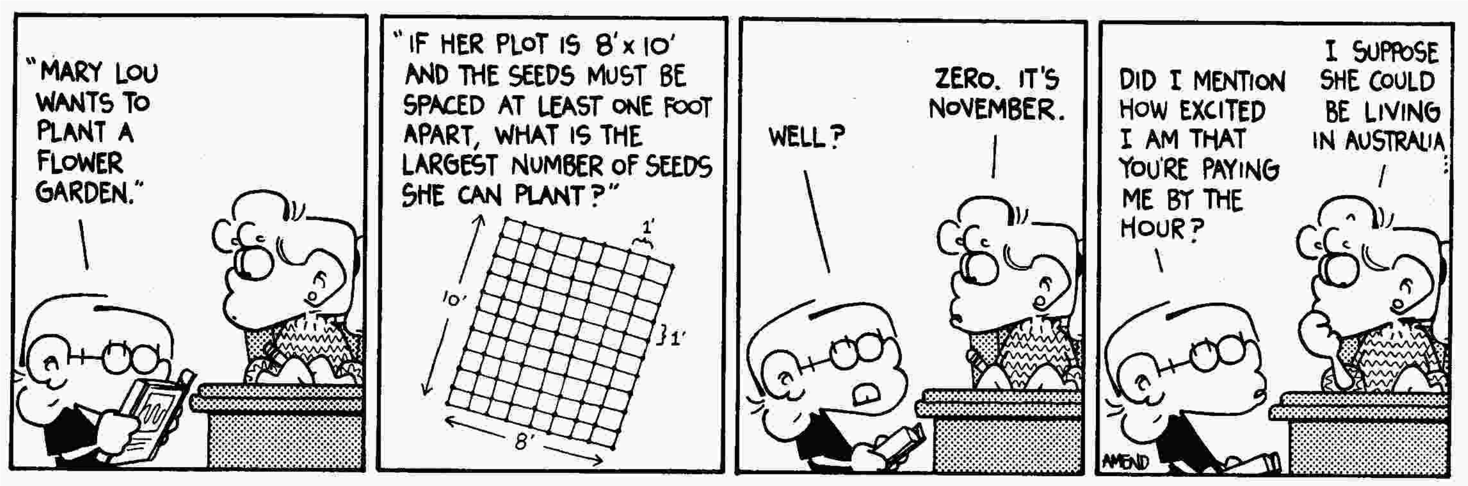
Exercice 8 *(Fonction gamma)*

Pour tout réel $s > 0$, On pose $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$.

1) Montrer que Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe C^∞ sur cet intervalle.
2) Prouver que pour tout réel $s > 0$, on a $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
3) Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(m)$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(½)$, $\Gamma(m+½)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \,]1,2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Prouver que Γ' est croissante et en déduire les variations de Γ sur $\mathbb{R}_+^*$. Construire alors le tableau de variation complet de Γ. On donnera un équivalent simple de Γ en 0.
5) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;m]$, $\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \le e^{-x}$. Montrer que $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$.
6) Montrer que $\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! \, m^s}{s(s+1)...(s+m)}$, pour tout réel $s > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

   ☺ *On pourra procéder par intégrations par parties successives.*
7) Montrer que pour tout réel $s > 0$, $\Gamma(s) = \lim\limits_{m \to +\infty} \frac{m! \, m^s}{s(s+1)...(s+m)}$.
8) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \ln\left(\Gamma(t)\right) dt$. Donner la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$.

   ☺ *On pourra utiliser* $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+1} \ln\left(\Gamma(t)\right) dt$.



Exercice 9 *(Mines)*

Montrer que pour tout réel $x>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\arctan\left(\frac{x}{t}\right)dt=\int_0^x\frac{\ln t}{t^2-1}dt$.

Exercice 10 *(Centrale)*

Soient $f\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, croissante et telle que $f(0)>0$, et $\phi\in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que ϕ' est décroissante et strictement positive, $\phi(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$.

On suppose en outre qu'il existe un réel $t_0\geq 0$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}e^{-t_0\phi(x)}f(x)dx$ existe.

Pour tout réel $t\geq t_0$, on pose $F(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t\phi(x)}f(x)dx$. On cherche un équivalent de F quand $t\to+\infty$.

1) Prouver que F est bien définie sur $[t_0,+\infty[$ et justifier que l'on peut se contenter d'étudier le cas où $t_0=0$.

Dans la suite, on suppose donc que $t_0=0$.

2) On suppose dans cette question que $\phi=id$.

   a. Montrer que pour tout réel $\alpha>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}e^{-t\phi(x)}f(x)dx=0$, puis que $\lim\limits_{t\to+\infty}t\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}e^{-t\phi(x)}f(x)dx=0$.

   b. En déduire que $F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{f(0)}{t}$.

3) Dans le cas général, montrer que $F(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{f(0)}{t\,\phi'(0)}$.

   ☺ *On utilisera un changement de variable que l'on justifiera.*