

Corrigé du DM n° 6

Dans tout le problème, $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Partie II

Q14. On a $M_n = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 1 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix}$ et :

$$M_n^2 = \begin{pmatrix} 0_{n-2,2} & I_{n-2} \\ I_2 & 0_{2,n-2} \end{pmatrix}, \dots, M_n^k = \begin{pmatrix} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ I_k & 0_{k,n-k} \end{pmatrix}, \dots, M_n^n = I_n$$

On a $M_n^n = M_n^{n-1} M_n = I_n$, donc :

M_n est inversible d'inverse M_n^{n-1} .

Enfin, comme $M_n^n - I_n = 0_n$:

Un polynôme annulateur de M_n est $X^n - 1$.

Q15. Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples, les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité : les ω_n^k avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Donc, M_n admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ce qui permet de conclure que :

M_n est diagonalisable.

Le spectre de M_n est inclus dans l'ensemble des racines de $X^n - 1$ (qui annule M_n), soit :

$$Sp(M_n) \subset \{\omega_n^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}.$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $X = {}^t(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$. On a :

$$M_n X = \omega_n^k X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \omega_n^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \omega_n^k x_1 \\ x_3 = \omega_n^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega_n^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega_n^k x_n \end{cases}$$

La suite finie $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est géométrique de raison ω_n^k , donc on obtient :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \omega_n^{(i-1)k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, ω_n^k est bien valeur propre de M_n et donc :

$$Sp(M_n) = \{\omega_n^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$$

Et, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, si $X_k = {}^t(1 \ \omega_n^k \ \omega_n^{2k} \ \dots \ \omega_n^{(n-1)k})$, on a :

$$E_{\omega_n^k} = \ker(M_n - \omega_n^k I_n) = \text{Vect}(X_k = {}^t(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)).$$

Comme $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède n valeurs propres distinctes :

La famille (X_1, X_2, \dots, X_n) est une base de \mathbb{C}^n constituée de vecteurs propres de M_n .

Q16. Notons \mathcal{B}_c la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{C}^n et $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ avec $X_k = {}^t(1 \ \omega_n^k \ \omega_n^{2k} \ \dots \ \omega_n^{(n-1)k})$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a $\Phi_n = (\omega_n^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i, j \leq n} = (X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{n-1})$ où $(X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{n-1})$ est la matrice de la base \mathcal{B} dans \mathcal{B}_c , autrement dit la matrice de passage de \mathcal{B}_c à \mathcal{B} , soit :

$$\Phi_n = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}.$$

Ainsi :

$$\Phi_n \in GL_n(\mathbb{C})$$

De plus, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $M_n X_k = \omega_n^k X_k$ et :

$$\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$$

Q17. On a :

$$\begin{aligned} A = T(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= a_0 I_n + a_1 M_n + a_2 M_n^2 + \dots + a_{n-1} M_n^{n-1} \end{aligned}$$

avec $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Ainsi :

$$A = P(M_n) \text{ avec } P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}.$$

Q18. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On a vu que $X^n - 1$ est un polynôme annulateur de M_n .

Notons alors $P = (X^n - 1)Q + R$ la division euclidienne de P par $X^n - 1$ avec $\deg R < n$.

On a alors :

$$P(M_n) = (M_n^n - I_n)Q(M_n) + R(M_n) = R(M_n).$$

Et $\deg R < n$, donc il existe $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $R = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$. Alors :

$$P(M_n) = R(M_n) = a_0I_n + a_1M_n + a_2M_n^2 + \dots + a_{n-1}M_n^{n-1} = T(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

Ainsi :

$P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q19. Notons $\text{Cir}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble (non vide !) des matrices circulantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par définition, on a :

$$\text{Cir}_n(\mathbb{C}) \subset \text{Toep}_n(\mathbb{C}).$$

Soient $A, B \in \text{Cir}_n(\mathbb{C})$ avec :

$$A = T(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

$$B = T(b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$$

et $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n}$.

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda A + \mu B &= \lambda \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_1 & & b_{n-2} \\ \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_2 & & \ddots & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 & \cdots & \lambda a_{n-2} + \mu b_{n-2} & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} \\ \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 & & \lambda a_{n-2} + \mu b_{n-2} \\ \vdots & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_2 + \mu b_2 & & \ddots & \lambda a_0 + \mu b_0 & \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 & \cdots & \lambda a_{n-1} + \mu b_{n-1} & \lambda a_0 + \mu b_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, $\lambda A + \mu B \in \text{Cir}_n(\mathbb{C})$ et $\text{Cir}_n(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire. Ainsi :

$\text{Cir}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$.

On a $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i M_n^i = P(M_n)$ et $B = \sum_{j=0}^{n-1} b_j M_n^j = Q(M_n)$, donc :

$$AB = P(M_n)Q(M_n) = L(M_n)$$

avec $L = PQ \in \mathbb{C}[X]$.

Alors, $AB \in \text{Cir}_n(\mathbb{C})$ d'après la question précédente et ainsi :

$\text{Cir}_n(\mathbb{C})$ est stable par produit.

Enfin :

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & & a_2 \\ \vdots & a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & & \ddots & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = T(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1) \in \text{Cir}_n(\mathbb{C}).$$

Donc :

$\text{Cir}_n(\mathbb{C})$ est stable par transposition.

Q20. D'après les questions 17 et 18, on a $\text{Cir}_n(\mathbb{C}) = \{P(M_n), P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

D'autre part, d'après la question 16, $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})$.

Alors, pour tout $A \in \text{Cir}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(M_n)$, et on a :

$$\Phi_n^{-1} P(M_n) \Phi_n = P(\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n) = P(\text{diag}(1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1})) = \text{diag}(P(1), P(\omega_n), P(\omega_n^2), \dots, P(\omega_n^{n-1})).$$

Donc, $A = P(M_n)$ est semblable à la matrice diagonale $\text{diag}(P(1), P(\omega_n), P(\omega_n^2), \dots, P(\omega_n^{n-1}))$ et ainsi :

Toute matrice circulante est diagonalisable.

Le résultat précédent, prouve aussi que :

Les valeurs propres de $A = P(M_n)$ sont les $P(\omega_n^k)$, avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de vecteurs propres.

Partie III

Q21. On a :

(i) $\exists x_0 \in \mathbb{C}^n, \text{Vect}(x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)) = \mathbb{C}^n.$

(ii) M est semblable à $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n.$

On veut : (i) \Leftrightarrow (ii).

(i) \Rightarrow (ii) :

On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{C}^n , avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$.

On a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f_M(e_i) = f_M(f_M^{i-1}(x_0)) = f_M^i(x_0) = e_{i+1}$ et si on pose $f_M(e_n) = \sum_{i=1}^n a_{i-1} e_i$, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(f_M) = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Ainsi, si \mathcal{B}_c est la base canonique de \mathbb{C}^n , $M = M_{\mathcal{B}_c}(f_M)$ et $M_{\mathcal{B}}(f_M)$ représentent le même endomorphisme dans deux bases de \mathbb{C}^n , donc :

$$M \text{ et } M_{\mathcal{B}}(f_M) = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \text{ sont semblables.}$$

(i) \Leftrightarrow (ii) :

On suppose que M est semblable à $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ avec $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Ceci veut dire qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(f_M) = C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f_M(e_i) = e_{i+1}$.

En posant $x_0 = e_1$, on a $e_1 = x_0 = f_M^0(x_0)$ et si, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$, alors :

$$e_{i+1} = f_M(e_i) = f_M(f_M^{i-1}(x_0)) = f_M^i(x_0).$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_i = f_M^{i-1}(x_0)$ et donc qu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n) = (x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de \mathbb{C}^n .

Ainsi, on a bien (i) \Leftrightarrow (ii).

III.A.1)

Q22. On pose $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ avec $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_M^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$, donc :

$$f_M^k(u) = \sum_{i=1}^n u_i f_M^k(e_i) = \sum_{i=1}^n u_i \lambda_i^k e_i.$$

Comme la famille $(f_M^k(u))_{0 \leq k \leq n-1}$ contient n vecteurs, c'est une base de \mathbb{C}^n si et seulement si elle est libre.

Soit alors $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(u) = 0$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n u_i \lambda_i^k e_i \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_k u_i \lambda_i^k e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_i \lambda_i^k e_i \right) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \right) e_i.$$

Et comme (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base, donc libre, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(u) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \right) e_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1}) = 0 \\ u_2 (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{n-1}) = 0 \\ \vdots \\ u_n (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1}) = 0 \end{cases}$$

Si l'un des u_i est nul alors, en éliminant les équations pour lesquelles $u_i = 0$ et en simplifiant les autres par $u_i \neq 0$, le système ci-dessus devient un système à n inconnues (les α_k) et $p < n$ équations. Ce système admet alors des solutions non nulles, et la famille $(f_M^k(u))_{0 \leq k \leq n-1}$ est liée.

Si maintenant $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le système se réécrit :

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow V \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, le système n'admet que $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$ pour solution si et seulement si la matrice V est inversible. Comme $\det V$ est un déterminant de Vandermonde, V est inversible si et seulement si les λ_i sont distincts deux à deux.

Finalement :

La famille $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de \mathbb{C}^n si et seulement si, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_i \neq 0$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ quand $i \neq j$.

Q23. On garde les notations de la question précédente.

Par définition, f_M est cyclique s'il existe $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de \mathbb{C}^n .

Or, ceci est le cas si et seulement si tous les u_i sont non nuls et, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Ainsi, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors, pour tout vecteur $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de \mathbb{C}^n .

Et réciproquement, si $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ est une base de \mathbb{C}^n , alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$, on a $\lambda_i \neq \lambda_j$.

Finalement :

Un endomorphisme diagonalisable de \mathbb{C}^n est cyclique si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes.

De plus, d'après ce qui précède :

$u \in \mathbb{C}^n$ est cyclique s si ses coordonnées dans une base de vecteurs propres sont toutes non nulles.

III.A.2)

Q24. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})X = \lambda X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Et on a :

$$\begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} + a_{n-2} x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 - a_1 x_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2} x_n \\ x_{n-1} = \lambda x_n - a_{n-1} x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 = a_0 x_n \\ \lambda x_2 - x_1 = a_1 x_n \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} - x_{n-2} = a_{n-2} x_n \\ \lambda x_n - x_{n-1} = a_{n-1} x_n \end{cases}$$

En effectuant $L_i = L_i + \lambda L_{i+1}$ pour $i = n-1, n-2, \dots, 2, 1$ successivement, le système ci-dessus équivaut à :

$$\begin{cases} (\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0) x_n = 0 \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_2 \lambda - a_1) x_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1} \lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases}$$

La première équation du dernier système donne $x_n = 0$ ou $\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0$. Or, si $x_n = 0$, alors $X = 0$, donc le système $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$ admet une solution non nulle si et seulement si $\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0$. Autrement dit :

λ est valeur propre de $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ si et seulement s'il est racine de $X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$.

Q25. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On vient de voir que si $\lambda^n - a_{n-1} \lambda^{n-1} - \dots - a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0$, alors le système

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})X = \lambda X \text{ admet pour solution } X = x_n \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_2 \lambda - a_1 \\ \lambda^{n-2} - a_{n-1} \lambda^{n-3} - \dots - a_2 \\ \vdots \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc :}$$

Si λ est une valeur propre de $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, donc une racine de $X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$, le

sous-espace propre associé à λ est la droite $\text{Vect}(X_\lambda)$ avec $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_2 \lambda - a_1 \\ \lambda^{n-2} - a_{n-1} \lambda^{n-3} - \dots - a_2 \\ \vdots \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Q26. Soit f un endomorphisme cyclique de \mathbb{C}^n . Il existe alors $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et une base de \mathbb{C}^n dans laquelle la matrice de f est $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$.

D'après ce qui précède les valeurs propres de $C(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, donc de f , sont les racines du polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Or, f est diagonalisable si et seulement si la somme directe de ses sous-espaces propres est \mathbb{C}^n , ce qui revient à la somme des dimensions de ses sous-espaces propres \mathbb{C}^n égale à n . Or, comme ici les sous-espaces propres sont des droites, cette somme est égale au nombre de sous-espaces propres, donc au nombre de racines distinctes de P .

Finalement :

Un endomorphisme cyclique de \mathbb{C}^n est diagonalisable si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes.

III.A.3) On a $C(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), gf_M = f_Mg\}$.

Q27. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a :

$$f_M P(f_M) = f_M \left(\sum_{k=0}^d a_k f_M^k \right) = \sum_{k=0}^d a_k f_M^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^d a_k f_M^k \right) f_M = P(f_M) f_M.$$

Donc, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(f_M) \in C(f_M)$$

Q28. Comme f_M est cyclique, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), f_M^2(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de \mathbb{C}^n .

Soit $g \in C(f_M)$. Il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)$ et pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i f_M^{i-1}(x_0) \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} g(x) &= g\left(\sum_{i=1}^n x_i f_M^{i-1}(x_0)\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(f_M^{i-1}(x_0)) = \sum_{i=1}^n x_i f_M^{i-1}(g(x_0)) = \sum_{i=1}^n x_i f_M^{i-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_i \alpha_k f_M^{i-1+k}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_k x_i f_M^{k+i-1}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i f_M^{i-1}(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f_M^k(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $g(x) = P(f_M)(x)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, donc $g = P(f_M)$ et finalement :

$$\text{Il existe } (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } g = P(f_M) \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k.$$

Q29. D'après la question 27, on a $\{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\} \subset C(f_M)$ et d'après la question précédente, on a $C(f_M) \subset \{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\}$, donc :

$$C(f_M) = \{P(f_M), P \in \mathbb{C}[X]\}$$

III.A.4) Notons $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n et u l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à la matrice N .

Q30. La matrice N est triangulaire inférieure et tous ses coefficients diagonaux sont nuls, donc son polynôme caractéristique est $\chi_N = X^n$ et la seule valeur propre éventuelle de N est 0. Comme $u(\varepsilon_n) = 0$, 0 est bien valeur propre de N . Enfin, $\text{Im } N = \text{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, donc $\text{rg}(N) = n-1$ et d'après le théorème du rang, le noyau de N est de dimension 1. Ainsi, $\ker N = \text{Vect}(\varepsilon_n)$. Finalement :

La seule valeur propre de N est 0, de sous-espace propre associé $\ker N = \text{Vect}(\varepsilon_n)$.

Il découle immédiatement que :

N n'est pas diagonalisable.

Ce n'est pas un scoop car N est nilpotente ($\chi_N(N) = N^n = 0_n$) et non nulle.

Q31. On a pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k+1}$, donc $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ et si, pour $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $u^{k-1}(\varepsilon_1) = \varepsilon_k$ alors :

$$u^k(\varepsilon_1) = u(u^{k-1}(\varepsilon_1)) = u(\varepsilon_k) = \varepsilon_{k+1}.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\varepsilon_k = u^{k-1}(\varepsilon_1)$.

Alors, $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, f_M(\varepsilon_1), \dots, f_M^{n-1}(\varepsilon_1))$ est une base de \mathbb{C}^n , donc, par définition, u est cyclique, et donc :

N est cyclique.

Q32. Posons $C(N) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AN = NA\}$ et appelons \mathcal{T}_i l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures, autrement dit l'ensemble des matrices de la forme :

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} t_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_{-1} & t_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & 0 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

Soit $T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{T}_i$. On a :

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0)N = NT(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t_0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ t_{-1} & t_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & t_0 & 0 & 0 \\ t_{-n+2} & \cdots & \cdots & t_{-1} & t_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $T(t_{-n+1}, \dots, t_{-1}, t_0, 0, \dots, 0) \in C(N)$ et ainsi :

$$\underline{\mathcal{T}_i \subset C(N)}.$$

Soit $A \in C(N)$ et v l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à A .

On a $AN = NA$, donc $vu = uv$ et ainsi, $v \in C(u)$. Or, u est cyclique, donc d'après la question 29, on a

$C(u) = \{P(u), P \in \mathbb{C}[X]\}$, donc il existe $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v = P(u)$, soit $A = P(N)$.

Or, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $N^k = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & 0_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n$, on a $N^k = N^n = 0_n$.

Donc :

$$A = P(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N^k = a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & 0_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & a_1 & a_0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_i.$$

Donc, pour tout $A \in C(N)$, $A \in \mathcal{T}_i$ et ainsi :

$$\underline{C(N) \subset \mathcal{T}_i}.$$

Finalement, $C(N) = \mathcal{T}_i$, autrement dit :

L'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.