Corrigé du DS de n° 4

Exercice 1 (extrait : CCP - PSI - 2014)

Partie I

I.1. On prend ici $f(t)=t$. La fonction *f* est bien de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f'(t)=1$, donc :

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}.$$

Or, la courbe de *f* sur $[0,1]$ (dans une repère orthonormé) est le segment $[OB]$ où O est l'origine du repère et $B(1,1)$. Ce segment est la diagonal du carré $OABC$ avec $A(1,0)$ et $C(0,1)$.

Comme $OA=AB=1$, le théorème de Pythagore donne :

$$L(f)=OB=\sqrt{OA^2+AB^2}=\sqrt{2}.$$

Comme le résultat est le même que le précédent :

$$\boxed{\text{La formule } L(f)=\int_0^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \text{ est vérifiée pour } f:t\mapsto t.}$$

I.2. On prend ici $f(t)=\operatorname{ch}t$. La fonction *f* est bien de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f'(t)=\operatorname{sh}t$, donc :

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}\,dt=\int_0^1\sqrt{\operatorname{ch}^2t}\,dt=\int_0^1\operatorname{ch}t\,dt=\left[\operatorname{sh}t\right]_0^1=\operatorname{sh}1.$$

Donc :

$$\boxed{L(f)=\operatorname{sh}1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)}$$

I.3. On prend ici $f(t)=\sqrt{1-t^2}$.

I.3.1. La fonction *f* est bien de classe C^1 sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ avec $f'(t)=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$, donc :

$$L(f)=\int_0^{1/\sqrt{2}}\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\left[\arcsin t\right]_0^{1/\sqrt{2}}=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Soit :

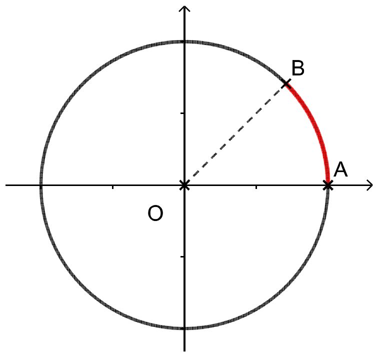
$$\boxed{L(f)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}}$$

I.3.1. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de *f* sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ (dans une repère orthonormé).

Soit $M(x,y)$ un point du plan. On a :

$$M\in\mathscr{C} \iff \begin{cases} y=f(x) \\ x\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\end{cases} \iff \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2}\geq 0 \\ 0\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 0\leq x\leq \frac{1}{\sqrt{2}},\ y\geq 0\end{cases}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points $M(x,y)$ du cercle trigonométrique tels que $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y\geq 0$, soit l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle avec $A(1,0)$ et $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:



La longueur $L(f)$ de $\mathscr{C}$ (l'arc $\overset{\frown}{AB}$) est donc $R\alpha$ avec ici $R=1$ et où α est la mesure (en radians dans $[0,2\pi]$) de l'angle $\widehat{AOB}$, soit $\alpha=\frac{\pi}{4}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{On retrouve } L(f)=\frac{\pi}{4}.}$$

I.4. On prend ici $f(t)=t^2$. La fonction *f* est bien de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f'(t)=2t$.

On a alors :

$$L(f)=\int_0^1\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{1+4t^2}\,dt.$$

Et, en posant $u=2t$:

$$L(f)=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+u^2}\,du.$$

En intégrant par parties, avec $t\mapsto\sqrt{1+t^2}$ et $t\mapsto t$ de classe C^1 sur $[0,2]$, on obtient :

$$L(f)=\frac{1}{2}\left(\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^2-\int_0^2 t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}-\int_0^2\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1-(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

$$=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt-L(f)$$

Soit :

$$2L(f)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\,.$$

Soit $g:t\mapsto \ln(t+\sqrt{1+t^2})$.

Pour tout réel t, on a :

$$t^2<1+t^2 \quad\Leftrightarrow\quad |t|<\sqrt{1+t^2} \quad\Rightarrow\quad -t<\sqrt{1+t^2} \quad\Leftrightarrow\quad t+\sqrt{1+t^2}>0\,.$$

La fonction g est donc définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de $t\mapsto t+\sqrt{1+t^2}$, de classe C^1 et strictement positive sur $\mathbb{R}$ par la fonction ln qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$g'(t)=\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

Donc :

$$2L(f)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\int_0^2 g'(t)\,dt=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\big[g(t)\big]_0^2=\sqrt{5}+\frac{1}{2}g(2)=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})\,.$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{L(f)=\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})}$$

Partie II

II.1. On prend ici $f(t)=\dfrac{1}{t}$.

II.1.1. La fonction f est de classe C^1 sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ avec $f'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$, donc :

$$L(f)=\int_{1/2}^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_{1/2}^1 \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt\,.$$

Soit :

$$\boxed{L(f)=\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}\,dt}$$

II.1.2. La longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à $[1,2]$ est :

$$L'(f)=\int_1^2 \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt=\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\,dt=\int_1^2 \frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}\,dt\,.$$

En posant $u=\dfrac{1}{t}$, donc $du=-\dfrac{1}{t^2}dt$, on obtient :

$$L'(f)=\int_1^{1/2}\sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^4+1}\,(-du)=\int_{1/2}^{1}\sqrt{\frac{1}{u^4}+1}\,du=L(f)\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{L(f) \text{ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de } f \text{ à } [1,2].}$$

II.2.

II.2.1. La fonction $u\mapsto(1+u)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec

$$\boxed{\forall\, u\in\,]-1,1[\,,\ (1+u)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\,u^n\ .}$$

II.2.2. En prenant $\alpha=\dfrac{1}{2}$ dans la formule ci-dessus, on obtient pour tout $u\in\,]-1,1[$:

$$\sqrt{1+u}=(1+u)^{1/2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)u^n=1+\frac{1}{2}u+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)u^n\ .$$

Et pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$:

$$\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!}\frac{(2n)!}{(2n-1)\prod_{k=1}^{n}(2k)}=\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}\,.$$

Remarquons que pour $n=0$, la formule ci-dessus donne $(-1)\dfrac{0!}{2^0(-1)(0!)^2}=1$ et pour $n=1$, elle donne $\dfrac{2!}{2^2(2-1)(1!)^2}=\dfrac{1}{2}$. Donc, pour tout $u\in\,]-1,1[$:

$$\sqrt{1+u}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}u^n\ .$$

Alors, pour tout $t\in\,]0,1[$, on a $t^4\in\,]0,1[\,\subset\,]-1,1[$ et :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}=\frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}(t^4)^n\ .$$

Soit, pour tout $t\in\,]0,1[$:

$$\boxed{\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}=\frac{1}{t^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}t^{4n-2}}$$

II.2.3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n>0$ et :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+2)!(2n-1)2^{2n}(n!)^2}{(2n)!(2n+1)2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)(2n-1)}{(2n+1)2^2(n+1)^2}=\frac{2n-1}{2n+2}<1.$$

Donc, $a_{n+1}<a_n$ et :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est strictement décroissante.}}$$

La formule de Stirling donne $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, donc :

$$a_n=\frac{(2n)!}{(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{4\pi n}\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n}}{(2n)2^{2n}(2\pi n)\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}}=\frac{1}{(2n)\sqrt{\pi n}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{1,5}}}$$

II.2.4. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(t)=(-1)^{n-1}a_n\,t^{4n-2}$. Pour tout $t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, on a :

$$|u_n(t)|=a_n\,t^{4n-2}\le a_n.$$

Or, $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{1,5}}$ et, comme la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^{1,5}}$ converge (car $1,5>1$), la série $\sum a_n$ converge. Donc, la série de fonctions $\sum u_n$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, donc converge uniformément sur ce segment.

Comme les fonctions u_n sont toutes continues sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, on peut alors écrire :

$$\int_{1/2}^{1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\right)dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{1/2}^{1}u_n(t)\,dt.$$

Or, $L(f)=\displaystyle\int_{1/2}^{1}\frac{\sqrt{t^4+1}}{t^2}dt$ et pour tout $t\in\,]0,1[$, $\dfrac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}=\dfrac{1}{t^2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)$, donc :

$$L(f)=\int_{1/2}^{1}\left[\frac{1}{t^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\right]dt=\int_{1/2}^{1}\frac{dt}{t^2}+\int_{1/2}^{1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)\right)dt=\int_{1/2}^{1}\frac{dt}{t^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{1/2}^{1}u_n(t)\,dt.$$

Soit :

$$L(f)=\left[-\frac{1}{t}\right]_{1/2}^{1}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\int_{1/2}^{1}t^{4n-2}dt=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n\left[\frac{t^{4n-1}}{4n-1}\right]_{1/2}^{1}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_n}{4n-1}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right).$$

Et ainsi :

$$\boxed{L(f)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(4n-1)(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right)}$$

II.2.5. En utilisant les 5 premiers termes de la série, on obtient la valeur approchée L_a :

$$L(f)\approx L_a=1+\sum_{n=1}^{4}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(4n-1)(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right).$$

Soit :

$$\boxed{L(f)\approx L_a\approx 1{,}1312}$$

Et :

$$\begin{aligned}\left|L(f)-L_a\right|&=\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(4n-1)(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\left(1-\frac{1}{2^{4n-1}}\right)\right|\\&=\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(4n-1)(2n-1)2^{2n}(n!)^2}-\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(4n-1)(2n-1)2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{2^{4n-1}}\right|\\&=\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}-\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\frac{1}{2^{4n-1}}\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|L(f)-L_a\right|\le\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\right|+\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\frac{1}{2^{4n-1}}\right|.$$

Or, les séries $\sum(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}$ et $\sum(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\frac{1}{2^{4n-1}}$ vérifient toutes deux le critère spécial des séries alternées (car la suite (a_n) décrit vers 0), donc :

$$\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\right|\le\frac{a_5}{4\times5-1}=\frac{a_5}{19}$$

$$\left|\sum_{n=5}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_n}{4n-1}\frac{1}{2^{4n-1}}\right|\le\frac{a_5}{4\times5-1}\frac{1}{2^{4\times5-1}}=\frac{a_5}{19}\frac{1}{2^{19}}$$

Et $a_5=\frac{10!}{9\times2^{10}(5!)^2}=\frac{7}{2^8}$. Ainsi :

$$\boxed{\left|L(f)-L_a\right|\le\frac{1}{19}\frac{7}{2^8}\left(1+\frac{1}{2^{19}}\right)\approx 0{,}0014}$$

Partie III

On prend ici $p_n(t) = t^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et :

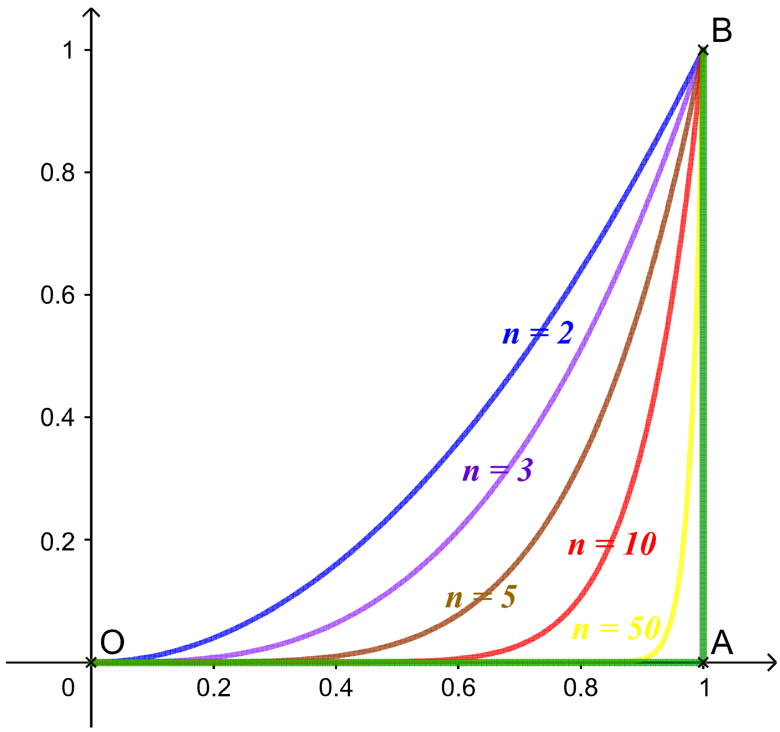
$$\lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + p_n'(t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}\, dt .$$

III.1.

III.1.1. D'après la partie I, on a immédiatement :

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = \sqrt{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5}) \end{array}}$$

III.1.2. Le graphique suivant donne les courbes de la fonction p_n pour diverses valeurs de n.



Plus n est grand, plus la courbe de p_n se rapproche de la réunion des segments [OA] et [AB]. Comme ces deux segments sont de longueur 1, la ligne bisée OAB est de longueur 2, donc :

$$\boxed{\text{On conjecture que } \lambda_n \text{ converge vers 2.}}$$

III.2.

III.2.1. On a :

$$\mu_n = \lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}}\, dt - \int_0^1 n\, t^{n-1}\, dt = \int_0^1 \left(\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} - n\, t^{n-1}\right) dt .$$

Et en utilisant la quantité conjuguée :

$$\mu_n = \int_0^1 \frac{1+n^2t^{2n-2}-(nt^{n-1})^2}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}dt .$$

Soit :

$$\boxed{\mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}}$$

III.2.2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}\leq 1$ pour tout $t\in[0,1]$, donc :

$$\mu_n \leq \int_0^1 dt = 1 .$$

Et, si $\mu_n = 1$, alors $\int_0^1 dt-\mu_n = \int_0^1 g(t)\,dt = 0$ avec $g: t\mapsto 1-\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$.

Or, la fonction g est continue et positive sur $[0,1]$, donc si son intégrale est nulle, alors elle est nulle sur $[0,1]$. Ce n'est pas le cas (car $n\neq 0$), donc l'intégrale n'est pas nulle et $\mu_n\neq 1$.

Finalement, on a $\mu_n<1$, et comme $\mu_n = \lambda_n - n\int_0^1 t^{n-1}\,dt = \lambda_n - \left[t^n\right]_0^1 = \lambda_n - 1$, on obtient :

$$\lambda_n - 1 < 1 .$$

Et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\lambda_n < 2}$$

III.2.3. Posons $u_n : t\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2t^{2n-2}}+nt^{n-1}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0,1]$ et $\mu_n = \int_0^1 u_n(t)dt$.

De plus, pour tout $t\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nt^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} = 0$,

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $u: t\mapsto \begin{cases} 1 & \text{quand } t\in[0,1[\\ 0 & \text{quand } t=1 \end{cases}$, qui est continue par morceaux sur $[0,1]$.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, on a $|u_n(t)| = u_n(t)\leq 1$.

Ainsi :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est continue, donc continue par morceaux sur $[0,1]$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction u, continue par morceaux sur $[0,1]$;
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, on a $|u_n(t)| = u_n(t)\leq 1$ et $t\mapsto 1$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(t)dt = \int_0^1 u(t)dt = \int_0^1 dt = 1 .$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\mu_n = 1}$$

III.2.4. On a vu plus haut que $\mu_n = \lambda_n - 1$, donc $\lambda_n = \mu_n + 1$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = 2}$$

III.3. Ici, *f* est une fonction de $C^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, croissante de $f(0)=0$ à $f(1)=1$. On a toujours :

$$L(f) = \int_0^1 \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt .$$

Comme *f* est croissante, on a $f'(t)\geq 0$ sur $[0,1]$, donc pour tout $t\in[0,1]$:

$$\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)}\leq 1 .$$

On a alors :

$$L(f)-\int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1\Big(\sqrt{1+f'(t)^2}-f'(t)\Big)dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)}dt \leq \int_0^1 dt = 1 .$$

Comme plus haut, la fonction $t\mapsto 1-\dfrac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)}$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc si son intégrale est nulle, alors elle est nulle sur $[0,1]$, soit pour tout $t\in[0,1]$:

$$\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{1+f'(t)^2}=1-f'(t) \quad\Rightarrow\quad 1+f'(t)^2=\big(1-f'(t)\big)^2 = 1-2f'(t)+f'(t)^2 .$$

Ceci implique immédiatement que f' est nulle sur $[0,1]$, donc que *f* est constante sur $[0,1]$. Ceci est faux car $f(0)=0$ et $f(1)=1$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)}\right)dt \neq 0$, soit $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}+f'(t)}dt \neq 1$ et donc :

$$L(f)-\int_0^1 f'(t)\,dt < 1 \quad\Leftrightarrow\quad L(f) < 1+\int_0^1 f'(t)\,dt .$$

Or, *f* est de classe C^1 sur $[0,1]$, donc :

$$\int_0^1 f'(t)\,dt = \big[f(t)\big]_0^1 = f(1)-f(0) = 1 .$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{L(f) < 2}$$

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2002)

I.A.

I.A.1) Si $n=2$, on a $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ et si $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$:

$$AX=B \iff \begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2x_1+x_2 &= \beta_1\\ x_1+4x_2+x_3 &= \beta_2\\ x_2+2x_3 &= \beta_3\end{cases} \quad (\mathscr{S}_2).$$

La matrice augmentée de ce système est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\1&4&1&\beta_2\\0&1&2&\beta_3\end{array}\right).$$

Le coefficient en haut à gauche n'est pas nul, c'est donc le premier pivot : $p_0=2$.

On a alors :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\1&4&1&\beta_2\\0&1&2&\beta_3\end{array}\right)\xrightarrow[L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1]{}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\0&\frac{7}{2}&1&\beta_2-\frac{1}{2}\beta_1\\0&1&2&\beta_3\end{array}\right).$$

Le deuxième pivot est alors : $p_1=\dfrac{7}{2}$, et :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\0&\frac{7}{2}&1&\beta_2-\frac{1}{2}\beta_1\\0&1&2&\beta_3\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{7}L_2]{}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\0&\frac{7}{2}&1&\beta_2-\frac{1}{2}\beta_1\\0&0&\frac{12}{7}&\beta_3-\frac{2}{7}\beta_2+\frac{1}{7}\beta_1\end{array}\right).$$

On obtient alors une matrice triangulaire et le troisième et dernier pivot est $p_2=\dfrac{12}{7}$.

Pour finir la résolution, on effectue les opérations successives suivantes sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\0&\frac{7}{2}&1&\beta_2-\frac{1}{2}\beta_1\\0&0&\frac{12}{7}&\beta_3-\frac{2}{7}\beta_2+\frac{1}{7}\beta_1\end{array}\right)\xrightarrow[L_3\leftarrow \frac{7}{12}L_3]{}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&0&\beta_1\\0&\frac{7}{2}&1&\beta_2-\frac{1}{2}\beta_1\\0&0&1&\frac{7}{12}\beta_3-\frac{1}{6}\beta_2+\frac{1}{12}\beta_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{7}{12}\beta_1 + \frac{7}{6}\beta_2 - \frac{7}{12}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{2}{7} L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 - L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & \frac{7}{6}\beta_1 - \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{1}{12}\beta_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{6}\beta_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3 \end{array}\right)$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\text{La solution de } (\mathscr{S}_2) \text{ est } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{1}{12}\beta_3 \\ -\frac{1}{6}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 - \frac{1}{6}\beta_3 \\ \frac{1}{12}\beta_1 - \frac{1}{6}\beta_2 + \frac{7}{12}\beta_3 \end{pmatrix}.}$$

I.A.2) a) Dans le cas général, on a $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$, $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$:

$$A_{n+1}X = B \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = \beta_1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_{k-1} + 4x_k + x_{k+1} = \beta_k \\ \vdots \\ x_{n-1} + 4x_n + x_{n+1} = \beta_n \\ x_n + 2x_{n+1} = \beta_{n+1} \end{cases} \quad (\mathscr{S}_n).$$

La matrice augmentée est :

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1 \\
1 & 4 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_2 \\
0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_3 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & & 0 & \beta_4 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots & \beta_k \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & \beta_n \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \beta_{n+1}
\end{array}\right)$$

Pour résoudre le système $(\mathscr{S}_n)$, on réalise comme suit la succession d'opération sur les lignes uniquement et sans échange de lignes. On pose $p_0 = 2$.

<u>Etape 1</u> :

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{p_0} L_1]{}
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
p_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1^{(1)} \\
0 & p_1 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_2^{(1)} \\
0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_3^{(1)} \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & & 0 & \beta_4^{(1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots & \beta_k^{(1)} \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & \beta_n^{(1)} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \beta_{n+1}^{(1)}
\end{array}\right)
\quad \text{avec} \quad
\begin{cases}
p_1 = 4 - \dfrac{1}{p_0} \\
\beta_k^{(1)} = \beta_k \quad \forall\, k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{2\} \\
\beta_2^{(1)} = \beta_2 - \dfrac{1}{p_0} \beta_1
\end{cases}$$

<u>Etape 2</u> :

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{p_1} L_2]{}
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
p_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1^{(2)} \\
0 & p_1 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_2^{(2)} \\
0 & 0 & p_2 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_3^{(2)} \\
0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & & 0 & \beta_4^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots & \beta_k^{(2)} \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 & \beta_n^{(2)} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \beta_{n+1}^{(2)}
\end{array}\right)
\quad \text{avec} \quad
\begin{cases}
p_2 = 4 - \dfrac{1}{p_1} \\
\beta_k^{(2)} = \beta_k^{(1)} \quad \forall\, k \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{3\} \\
\beta_3^{(2)} = \beta_3^{(1)} - \dfrac{1}{p_1} \beta_2^{(1)}
\end{cases}$$

<u>Etape k</u> : On continue ainsi en réalisant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

$$\xrightarrow[L_{k+1} \leftarrow L_{k+1} - \frac{1}{p_{k-1}} L_k]{}
\left(\begin{array}{ccccccccc|c}
p_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_1^{(k)} \\
0 & p_1 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_2^{(k)} \\
0 & 0 & p_2 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_3^{(k)} \\
0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & 0 & & & 0 & \beta_4^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_k & 1 & 0 & \vdots & \beta_{k+1}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & 1 & 4 & \ddots & 0 & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & \beta_n^{(k)} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & \beta_{n+1}^{(k)}
\end{array}\right)
\quad \text{avec} \quad
\begin{cases}
p_k = 4 - \dfrac{1}{p_{k-1}} \\
\beta_i^{(k)} = \beta_i^{(k)} \quad \forall\, i \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k+1\} \\
\beta_{k+1}^{(k)} = \beta_{k+1}^{(k-1)} - \dfrac{1}{p_{k-1}} \beta_k^{(k-1)}
\end{cases}$$

Etape n :

$$\xrightarrow[L_{k+1}\leftarrow L_{k+1}-\frac{1}{p_{k-1}}L_k]{}\left(\begin{array}{cccccccccc|c} p_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \beta_1^{(n)} \\ 0 & p_1 & 1 & 0 & & & & & & 0 & \beta_2^{(n)} \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_3^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_4^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_k & 1 & 0 & & \vdots & \beta_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & p_{n-1} & & 1 & \beta_n^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & & p_n & \beta_{n+1}^{(n)} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_n = 2-\dfrac{1}{p_{n-1}} \\ \beta_i^{(n)} = \beta_i^{(n-1)} \quad \forall\, i\in [\![1,n]\!] \\ \beta_{n+1}^{(n)} = \beta_{n+1}^{(n-1)} - \dfrac{1}{p_{n-1}}\beta_n^{(n-1)} \end{cases}$$

La matrice ainsi obtenue est échelonnée par lignes.

Le système initial est alors un système de Cramer si tous les pivots $p_0, p_1, \dots, p_n$ sont non nuls. On suppose que c'est le cas (on verra plus loin que ça l'est effectivement).

Pour trouver la solution, on 'remonte' alors depuis la dernière ligne, en réalisant les étapes suivantes.

Etape n+1 :

$$L_{n+1} \leftarrow \frac{1}{p_n}L_{n+1}, \text{ puis } L_n \leftarrow L_n - L_{n+1} \quad \text{et on pose} \quad \begin{cases} \beta_i^{(n+1)} = \beta_i^{(n)} \quad \forall\, i \in [\![1,n+1]\!]\setminus\{n,n+1\} \\ \beta_n^{(n+1)} = \beta_n^{(n)} - \beta_{n+1}^{(n+1)} \\ \beta_{n+1}^{(n+1)} = \dfrac{1}{p_n}\beta_{n+1}^{(n)} \end{cases}$$

On obtient :

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c} p_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \beta_1^{(n+1)} \\ 0 & p_1 & 1 & 0 & & & & & & 0 & \beta_2^{(n+1)} \\ 0 & 0 & p_2 & 1 & 0 & & & & & 0 & \beta_3^{(n+1)} \\ 0 & 0 & 0 & p_3 & 1 & 0 & & & & 0 & \beta_4^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & p_k & 1 & 0 & & \vdots & \beta_{k+1}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & p_{n-1} & & 0 & \beta_n^{(n+1)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & & 1 & \beta_{n+1}^{(n+1)} \end{array}\right).$$

Etape n+2 à 2n : On recommence ainsi, pour tout $k=n$, puis $k=n-1$, puis … jusqu'à $k=2$:

$$L_k \leftarrow \frac{1}{p_{k-1}}L_k, \text{ puis } L_{k-1} \leftarrow L_{k-1} - L_k \quad \text{et on pose} \quad \begin{cases} \beta_i^{(2n-k+2)} = \beta_i^{(2n-k+1)} \quad \forall\, i \in [\![1,n+1]\!]\setminus\{k-1,k\} \\ \beta_{k-1}^{(2n-k+2)} = \beta_{k-1}^{(2n-k+1)} - \beta_k^{(2n-k+2)} \\ \beta_k^{(2n-k+2)} = \dfrac{1}{p_{n-1}}\beta_k^{(2n-k+1)} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} p_0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1^{(2n)} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \beta_2^{(2n)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_{n+1}^{(2n)} \end{array}\right).$$

Etape 2n+1 : Enfin, on effectue $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{p_0} L_1$ qui donne :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1^{(2n+1)} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \beta_2^{(2n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_{n+1}^{(2n+1)} \end{array}\right).$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} \beta_1^{(2n+1)} \\ \beta_2^{(2n+1)} \\ \vdots \\ \beta_{n+1}^{(2n+1)} \end{pmatrix}$ est la solution du système.

I.A.2) b) Les pivots $p_0, p_1, \dots, p_n$ sont les coefficients diagonaux de la matrice obtenue après le processus d'échelonnement par lignes, donc à l'issue de l'étape *n* ici.

On a vu au cours de la question précédente que :

$$\boxed{\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall\, k \in [\![1, n-1]\!],\ \ p_k = 4 - \dfrac{1}{p_{k-1}} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}}$$

I.A.2) c) On a $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 4 - \dfrac{1}{x}$.

La fonction *f* est définie, continue (car rationnelle) sur $\mathbb{R}^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cherchons ses éventuels points fixes. On a :

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x} = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

On a $u_0 = 2$ et $u_1 = f(u_0) = f(2) = 4 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$, donc :

$$2 - \sqrt{3} < u_0 < u_1 < 2 + \sqrt{3}.$$

Supposons alors que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $2 - \sqrt{3} < u_n < u_{n+1} < 2 + \sqrt{3}$.

Alors, comme $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right] \subset \mathbb{R}_+^*$, *f* est strictement croissante sur $\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]$, donc :

$$f\left(2-\sqrt{3}\right) < f(u_n) < f(u_{n+1}) < f\left(2+\sqrt{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2-\sqrt{3} < u_{n+1} < u_{n+2} < 2+\sqrt{3}.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2 - \sqrt{3} < u_n < u_{n+1} < 2 + \sqrt{3}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et majorée par $2+\sqrt{3}$, donc elle converge vers un réel $\ell \in \left[2, 2+\sqrt{3}\right]$.

Comme *f* est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(\ell)=\ell$ et le seul point fixe de *f* appartenant à $\left[2, 2+\sqrt{3}\right]$ est $2+\sqrt{3}$, on a $\ell = 2+\sqrt{3}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante et converge vers } 2+\sqrt{3}.}$$

I.A.2) d) Les pivots $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ sont les n premiers termes de la suite u. Or, on vient de voir que tous les termes de u sont compris entre 2 (son premier terme) et $2+\sqrt{3}$ (sa limite). Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ 2 \leq p_k \leq 2+\sqrt{3}.}$$

De plus, comme $p_{n-1} \geq 2$, on a $p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \geq 2 - \dfrac{1}{2} > 0$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $p_k \neq 0$: tous les pivots sont non nuls (ce que nous avions annoncé plus haut). Or, d'après la question **I.A.2)** a), la matrice A_{n+1} est équivalente par lignes à une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Comme les p_k sont tous non nuls, cette matrice triangulaire est inversible et donc :

$$\boxed{A_{n+1} \text{ est inversible.}}$$

I.B.

I.B.1) Remarquons déjà que :

$$\begin{vmatrix} 4 \end{vmatrix}_1 = 4 = c_1 \text{ et } \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}_2 = 15 = c_2.$$

Donc en posant $C_1 = (4)$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, on a $c_n = \det C_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$c_n = \det C_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n .$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$c_n = \det C_n = 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-1} .$$

Et en développant le second déterminant par rapport à la première ligne :

$$c_n = \det C_n = 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-2} = 4c_{n-1} - c_{n-2}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$, $c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n$.

Cette formule reste valable pour $n = 0$, car $4c_1 - c_0 = 15 = c_2$ et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire double. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 4r + 1 = 0$, de racines $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ (vu plus haut).

Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$c_n = \lambda(2-\sqrt{3})^n + \mu(2+\sqrt{3})^n.$$

En appliquant cela à $n = 0$, puis $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} c_0 = \lambda + \mu = 1 \\ c_1 = \lambda(2-\sqrt{3}) + \mu(2+\sqrt{3}) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \mu - \lambda = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \mu = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{c_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1} - (2-\sqrt{3})^{n+1}}{2\sqrt{3}}}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, on a par linéarité par rapport à la première colonne :

$$b_n = \det B_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 4-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n.$$

Et en développant le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$b_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Soit, pour tout entier $n \geq 3$, $b_n = c_n - 2c_{n-1}$ et donc :

$$\boxed{b_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}}$$

Pour tout entier $n \geq 3$, on a par linéarité par rapport à la première colonne :

$$a_n = \det A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4-2 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_n .$$

Et en développant le second déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$a_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_n - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}_{n-1} .$$

Soit, pour tout entier $n \geq 3$, $a_n = b_n - 2b_{n-1}$ (avec $b_2 = 7$) et donc :

$$\boxed{a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}\right]}$$

I.B.2) On a donc pour tout entier $n \geq 3$, $\det A_n = a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}\right]$ et :

$$\det A_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2+\sqrt{3})^{n-1} = (2-\sqrt{3})^{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2+\sqrt{3} = 2-\sqrt{3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2+\sqrt{3} = \pm\,(2-\sqrt{3}) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ceci est faux dans tous les cas, donc $\det A_n \neq 0$ et ainsi, pour tout entier $n \geq 3$:

$$\boxed{A_n \text{ est inversible.}}$$

I.B.3) On a $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{aligned} \chi_{A_3} = \det(XI_3 - A_3) &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 & 0 \\ -1 & X-4 & -1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} X-4 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)\left[(X-4)(X-2)-1\right] - (X-2) \\ &= (X-2)(X^2-6X+6) = (X-2)\left[(X-3)^2-3\right] \\ &= (X-2)(X-3-\sqrt{3})(X-3+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A_3 sont les racines de χ_{A_3}, donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A_3 \text{ sont } 2,\ 3+\sqrt{3} \text{ et } 3-\sqrt{3}.}$$

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\chi_{C_3}=\det\left(XI_3-C_3\right)=\begin{vmatrix} X-4 & -1 & 0 \\ -1 & X-4 & -1 \\ 0 & -1 & X-4 \end{vmatrix}=(X-4)\begin{vmatrix} X-4 & -1 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix}$$

$$=(X-4)\left[(X-4)^2-1\right]-(X-4)$$

$$=(X-4)\left[(X-4)^2-2\right]$$

$$=(X-4)(X-4-\sqrt{2})(X-4+\sqrt{2})$$

Les valeurs propres de C_3 sont les racines de χ_{C_3}, donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } C_3 \text{ sont } 4,\ 4+\sqrt{2} \text{ et } 4-\sqrt{2}.}$$

I.B.4) a) Posons :

$$N=M_n[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]-\lambda I_n=\begin{pmatrix} \alpha_1-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1}-\lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_n-\lambda \end{pmatrix}.$$

Soit $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$. On a :

$$(x_1,x_2,...,x_n)\in\ker N \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \alpha_1-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2-\lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1}-\lambda & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_n-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{cases} (\alpha_1-\lambda)x_1+x_2=0 \\ x_1+(\alpha_2-\lambda)x_2+x_3=0 \\ \quad\vdots \\ x_{k-1}+(\alpha_k-\lambda)x_k+x_{k+1}=0 \\ \quad\vdots \\ x_{n-2}+(\alpha_{n-1}-\lambda)x_{n-1}+x_n=0 \\ x_{n-1}+(\alpha_n-\lambda)x_n=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x_2=(\lambda-\alpha_1)x_1 \\ x_{k+1}+x_{k-1}=(\lambda-\alpha_k)x_k \quad \forall\, k\in[\![2,n-1]\!] \\ x_{n-1}=(\lambda-\alpha_n)x_n \end{cases}$$

Notons alors i l'entier compris entre 1 et n tel que $|x_i|=\max\limits_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k|$. Si $|x_i|\neq 0$, alors $|x_i|>0$ et :

- si $i=1$, $|x_2|=|\lambda-\alpha_1||x_1|>|x_1|$, ce qui est absurde ;
- si $i=n$, $|x_{n-1}|=|\lambda-\alpha_n||x_n|>|x_n|$, ce qui est absurde ;
- si $i\in[\![2,n-1]\!]$, $|x_{i+1}+x_{i-1}|=|\lambda-\alpha_i||x_i|>2|x_i|$ et $|x_{i+1}+x_{i-1}|\leq|x_{i+1}|+|x_{i-1}|\leq 2|x_i|$, ce qui est encore absurde.

Ainsi, $|x_i| \neq 0$ mène à une absurdité dans tous les cas, donc $|x_i| = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k| = 0$, soit $x_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc $(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ et ainsi, $\ker N = \{0\}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{N = M_n[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] - \lambda I_n \text{ est inversible.}}$$

I.B.4) a) Pour toute valeur propre λ de $M_n[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$, on a $\det(M_n[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] - \lambda I_n) = 0$, donc $M_n[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] - \lambda I_n$ n'est pas inversible. La contraposée du résultat précédent donne :

$$(|\lambda - \alpha_1| \leq 1) \text{ ou } (\exists k \in [\![2, n-1]\!],\ |\lambda - \alpha_k| \leq 2) \text{ ou } (|\lambda - \alpha_n| \leq 1).$$

Soit :

$$(\lambda \in [\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1]) \text{ ou } (\exists k \in [\![2, n-1]\!],\ \lambda \in [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2]) \text{ ou } (\lambda \in [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]).$$

Ceci se récrit :

$$\lambda \in [\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k \in [\![2,n-1]\!]} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1].$$

Et ainsi :

$$\boxed{Sp(M_n[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]) \subset [\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k \in [\![2,n-1]\!]} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]}$$

Avec $A_n = M_n[2, 4, ..., 4, 2]$, $B_n = M_n[2, 4, ..., 4, 4]$ et $C_n = M_n[4, 4, ..., 4, 4]$, on a alors :

$$Sp(A_n) \subset [2-1, 2+1] \cup \left(\bigcup_{k \in [\![2,n-1]\!]} [4-2, 4+2] \right) \cup [2-1, 2+1] = [1, 6]$$

$$Sp(B_n) \subset [2-1, 2+1] \cup \left(\bigcup_{k \in [\![2,n-1]\!]} [4-2, 4+2] \right) \cup [4-1, 4+1] = [1, 6]$$

$$Sp(C_n) \subset [4-1, 4+1] \cup \left(\bigcup_{k \in [\![2,n-1]\!]} [4-2, 4+2] \right) \cup [4-1, 4+1] = [2, 6]$$

Ainsi, 0 n'appartient pas au spectre de A_n, ni à celui de B_n, ni à celui de C_n, donc :

$$\boxed{A_n,\ B_n \text{ et } C_n \text{ sont inversibles.}}$$