DM n° 7

Exercice 1 : Extrait adapté de Centrale - PSI - 2009

Soit $n \geqslant 2$ un entier et A, B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On propose de démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

I.A - Cas de la valeur 0.

I.A.1) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, $\det(AB) = 0$.

I.A.2) Démontrer que 0 est valeur propre de AB si, et seulement si, 0 est valeur propre de BA.

I.B - Soit λ une valeur propre réelle non nulle de AB, $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de AB associé à cette valeur propre λ.

I.B.1) Démontrer que les vecteurs ABX et BX sont non nuls.

I.B.2) Démontrer que le vecteur BX est vecteur propre pour la matrice BA.

I.B.3) Démontrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.

I.C - On suppose que A est inversible. On note I la matrice identité d'ordre n.

I.C.1) En factorisant de deux façons différentes la matrice $ABA - xA$, démontrer que pour tout x réel ou complexe, on a : $\det(AB - xI) = \det(BA - xI)$.

I.C.2) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec le même ordre de multiplicité.

I.D - Montrer que le résultat perdure si A n'est pas inversible.

Exercice 2 : adapté d'un oral de Centrale - MP - 2017

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et f et g deux endomorphismes de E, de trace non nulle, tels que la famille (f, g) est libre et pour tout $x \in E$, la famille $\big(f(x), g(x)\big)$ est liée.

1) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \ker f$, il existe un unique $a_x \in \mathbb{K}$ tel que $g(x) = a_x f(x)$.
2) Prouver que pour tous $x, y \in E \setminus \ker f$ tels que la famille $\big(f(x), f(y)\big)$ est libre, on a $a_x = a_y$.
3) Prouver que f et g sont de rang 1, puis que f et g sont diagonalisables.