DS de Mathématiques n° 4

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice 1 (extrait : CCP - PSI - 2014)

Notations, définitions et rappels

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f.

Partie I

Quelques exemples de calculs de longueurs

I.1 Vérifier la formule donnant $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t$.

I.2 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = \mathrm{ch}(t)$.

I.3 Un exemple de calcul de longueur d'un arc de courbe

I.3.1 Calculer $L(f)$ pour f définie sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$.

I.3.2 Retrouver le résultat de la question **I.3.1** sans calcul, par des considérations géométriques.

I.4 Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(t) = t^2$.

Calculer $L(f)$, en utilisant une intégration par parties

☺ *On pourra dériver* $t \mapsto \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ *après avoir prouvé que cette fonction est bien définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Partie II
Un calcul approché de longueur

L'objectif de cette partie est d'effectuer un calcul approché de la longueur d'un arc d'hyperbole. On considère, pour ce faire, la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ par $f(t) = \frac{1}{t}$.

II.1 Expression intégrale de $L(f)$

II.1.1 Donner une expression intégrale de $L(f)$.

II.1.2 Montrer que $L(f)$ est aussi la longueur de l'arc d'hyperbole correspondant à la restriction de f à l'intervalle $[1, 2]$.

II.2 Expression de $L(f)$ sous forme de série numérique

II.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Rappeler le développement en série entière de la fonction $u \mapsto (1+u)^\alpha$, en précisant son domaine de validité.

II.2.2 Montrer que, pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{(2n-1)\, 2^{2n} (n!)^2} t^{4n-2}.$$

II.2.3 On note, pour tout entier $n \geq 1$, $a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)\, 2^{2n} (n!)^2}$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et donner un équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

II.2.4 En déduire une expression de $L(f)$ comme somme d'une série numérique (on vérifiera avec soin les hypothèses du théorème utilisé).

II.2.5 Donner une valeur approchée de $L(f)$ en utilisant les 5 premiers termes de la série obtenue à la question précédente et donner une majoration de l'erreur commise.

Partie III

Longueur du graphe des fonctions puissances

On s'intéresse ici, pour tout entier $n \geq 1$, aux fonctions puissances p_n définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \ p_n(t) = t^n.$$

On désigne par $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_n = L(p_n) = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} dt.$$

III.1 Conjecture sur la limite éventuelle de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

III.1.1 Déterminer λ_1 et λ_2.

III.1.2 En traçant, sur un même graphe, les courbes représentatives de quelques fonctions p_n avec n de plus en plus grand, conjecturer la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi que la valeur de sa limite éventuelle.

III.2 Convergence et limite de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

III.2.1 Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\lambda_n - n \int_0^1 t^{n-1} dt = \mu_n$$

où :

$$\mu_n = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + n^2 t^{2n-2}} + n t^{n-1}}.$$

III.2.2 Montrer que $\lambda_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2.3 Déterminer la limite de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (on citera avec précision le théorème utilisé).

III.2.4 En déduire la convergence de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ainsi que la valeur de sa limite.

III.3 Plus généralement, montrer que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on a alors $L(f) < 2$.

Exercice 2 (extrait : Centrale - PSI - 2002)

Partie I - Matrices tridiagonales

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$A_n = M_n[2, 4, \ldots, 4, 2]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 4, \alpha_n = 2)$

$B_n = M_n[2, 4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

$C_n = M_n[4, \ldots, 4]$; $(\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 4)$

I.A - Méthode du pivot

Dans cette section on pose

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}$$

et on se propose de résoudre le système $(\mathscr{S}_n)$ $A_{n+1}X = B$, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, par la méthode du pivot de Gauss **sans échange de lignes**.

I.A.1) Cas $n = 2$.

Résoudre par cette méthode le système $(\mathscr{S}_2)$.

On remarquera en particulier que les pivots successifs valent :

$$p_0 = 2 \ ; p_1 = \frac{7}{2} \ ; p_2 = \frac{12}{7} .$$

I.A.2) On revient au cas général.

a) Écrire une procédure de résolution du système

$$A_{n+1}X = B ,$$

suivant l'algorithme du pivot de Gauss sans échange de lignes.

b) On note $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ la suite des pivots. Vérifier que :

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ \forall k \in \{0, \ldots, n-2\}, \quad p_{k+1} = 4 - \dfrac{1}{p_k} \\ p_n = 2 - \dfrac{1}{p_{n-1}} \end{cases}$$

c) Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

d) En déduire que $(\forall k \in \{0, \ldots, n-1\}) \quad (2 \le p_k \le 2 + \sqrt{3})$ et que A_{n+1} est inversible.

I.B - Calculs explicites

Notation : pour toute matrice M, on note $det\ M$ son déterminant.

I.B.1) On pose $c_0 = 1$, $c_1 = 4$, $c_2 = 15$ et pour tout $n \ge 3$, $c_n = det\ C_n$, $b_n = det\ B_n$, $a_n = det\ A_n$. Montrer que la suite $(c_n)_{n \ge 3}$ vérifie une relation de récurrence simple ; en déduire $(c_n)_{n \ge 3}$ puis $(b_n)_{n \ge 3}$ et $(a_n)_{n \ge 3}$.

I.B.2) En déduire que A_n est inversible.

I.B.3) Calculer explicitement les valeurs propres de A_3 et C_3.

I.B.4) **Localisation des valeurs propres**.

a) Soit λ un réel tel que :

$$|\lambda - \alpha_1| > 1$$
$$|\lambda - \alpha_n| > 1$$

et, $\forall k \in \{2, 3, \ldots n-1\} \quad |\lambda - \alpha_k| > 2$.

Montrer qu'alors $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] - \lambda I$ est inversible.

b) En déduire que les valeurs propres de $M_n[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ appartiennent à la réunion des intervalles

$$[\alpha_1 - 1, \alpha_1 + 1] \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-1} [\alpha_k - 2, \alpha_k + 2] \right) \cup [\alpha_n - 1, \alpha_n + 1]$$

et que A_n, B_n et C_n sont inversibles.