Devoir surveillé n° 6

Concours blanc

du lundi 6 janvier 2020

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

Instructions générales :

Les candidats sont priés

- de vérifier que le sujet dont ils disposent comporte bien 6 pages ;
- de toujours justifier leurs réponses.

Enfin, les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Remarque importante :

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Bon courage !

PROBLÈME 1

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver, pour tout réel x strictement positif et tout entier naturel n, la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, du.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \quad \text{puis que} \quad T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ pour tout n entier naturel.
6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On pourra écrire $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ *pour* $u \geqslant x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt = \sqrt{2\pi}$.

Soit $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$;

H2 : $f''(0) = -1$;

H3 : Pour tout $x \in]-1; 1[\setminus\{0\}$, $\quad 0 < f(x) < 1$.

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1[$.

Pour $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$, on pose
$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(f(x)\right).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$.

   On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ, sur $]-1;1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que, pour tout $x \in [-1;1]$, on ait
$$f(x) \leqslant e^{-ax^2}.$$

   On pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

   Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } \ u \in [-\sqrt{n};\sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$$g(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

11. En déduire que
$$\int_{-1}^{1} (f(x))^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

    On en déduit de la même manière que
$$\int_{0}^{1} (f(x))^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{1}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on redémontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 5 que
$$n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n),$$
    avec
$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

13. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x + 1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration de J_n.

14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n.

15. En déduire que
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Fin du problème 1

PROBLÈME 2

Notations

On désigne par $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes dont les coefficients sont des nombres complexes. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de la matrice A et $\mathrm{rg}\,(A)$ le rang de A.
On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E. L'espace vectoriel V admet pour base canonique :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $(k,m) \in [\![1,n]\!]^2$ on pose $E_{k,m} = {}^te_k e_m$ ce qui donne une matrice à n lignes et n colonnes dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 si $(i,j) = (k,m)$ et 0 sinon. La base canonique de E est constituée des n^2 matrices $E_{m,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant m \leqslant n$. On note I la matrice identité, $I = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} E_{k,k}$.
Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw,\ w \in W\}$. Si F est un sous-ensemble de E , on dit que W est stable par F si : $\forall A \in F, A(W) \subset W$.
Pour tout sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :
P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,
P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n ,
P_3 : $\mathcal{L}$ contient I,
P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E ,
P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices ($(A,B) \in \mathcal{L}^2 \Longrightarrow AB \in \mathcal{L}$),
P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles , soit $\mathcal{L} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

I.A.1) Soit x un vecteur non nul de V. Montrer que pour tout vecteur y non nul de V il existe une matrice inversible A telle que $Ax = y$.

Indication : on peut considérer deux cas :

- *la famille (x,y) est liée,*
- *la famille (x,y) est libre.*

En déduire que la propriété P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

I.A.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \ldots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.B - Dans cette section I.B, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que $m > k \Longrightarrow t_{k,m} = 0$.

I.B.1) Montrer que e_n est vecteur propre de tout $T \in \mathcal{L}$ (c'est à dire Te_n est colinéaire à e_n). Que peut-on dire de la propriété P_6 pour $\mathcal{L}$?

I.B.2) Indiquer celles des propriétés $P_1, \ldots, P_5$ qui sont vérifiées par $\mathcal{L}$; justifier les réponses.

I.C - Dans cette section I.C, $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

I.C.1) On suppose que P_1 n'est pas vérifiée par $\mathcal{L}$ (les matrices 2×2 de rang 1 appartiennent donc toutes à $E \setminus \mathcal{L}$ le complémentaire de $\mathcal{L}$ dans E). Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Quelles sont les valeurs possibles du rang de $A - \lambda I$?
Montrer que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties vectorielles.

I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$. Montrer qu'alors la propriété P_1 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathcal{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II.

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathcal{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée. On note :

$$m = \min\{\mathrm{rg}\,(M),\ M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\}$$

et on se propose de montrer que $m = 1$ ce qui établira P_1.
On suppose dans un premier temps que $m \geqslant 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $\mathrm{rg}\,(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de V tels que : $\forall i \in [\![1, m]\!],\ M_0 x_i = z_i$.

II.A Montrer que $\{N z_1 | N \in \mathcal{L}\} = V$. On note alors N_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $N_0 z_1 = x_2$ et on pose $M_1 = M_0 N_0 M_0$. Montrer que (M_0, M_1) est une famille libre.

II.B Montrer que $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$, puis que :

$$\exists(\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) \mid z \neq 0_E \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.$$

En déduire que $0 < \mathrm{rg}\,(M_1 - a M_0) < rg(M_0)$. Conclure que $m = 1$.

Partie III.

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathcal{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées.

III.A - Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$; on note k la dimension de W.
Montrer que $\{M \in E | M(W) \subset W\}$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$ et dont la dimension vaut $n^2 - k(n-k)$. En déduire que $W = \{0_V\}$ ou $W = V$. On a donc démontré P_6.

III.B -

III.B.1) On suppose ici : $(*)\ \exists(k, m) \in [\![1, n]\!]^2,\ k \neq m \quad \text{et } E_{k,m} \in E \setminus \mathcal{L}$.
On note alors $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}\,(E_{k,m}, I)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $E_{k,m}$ et I.
Montrer que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geqslant 1$ puis que $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de (*) qui est vrai, donc $k \neq m \Rightarrow E_{k,m} \in \mathcal{L}$.

(a) On note J la matrice à n lignes et n colonnes, dont tous les coefficients valent 1 : $J = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E_{i,j}$.

Sans calculer son polynôme caractéristique, déterminer les valeurs propres de J.

Déterminer aussi une base des sous-espaces propres associés.

(b) En déduire que la matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} E_{i,j}$ est inversible.

En déduire que dans tous les cas $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible A.

III.C - Montrer que pour la matrice A définie ci-dessus, la famille $\left(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1}\right)$ est une famille liée. En déduire qu'il existe un entier $p > 0$ et des nombres complexes $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ tels que $\lambda_0 \lambda_p \neq 0$ et

$$\sum_{j=0}^{p} \lambda_j A^j = \lambda_0 I + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_p A^p = 0.$$

Montrer alors que $I \in \mathcal{L}$. On a donc démontré P_3.

Compte tenu de la partie II , la propriété P_1 est donc satisfaite.

Fin du problème 2