Devoir surveillé n° 6

Concours blanc

Corrigé

PROBLÈME 1

D'après

Concours Commun Mines-Ponts
Session 2017 - Filière PC
Épreuve de mathématiques 2

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{(nx)^k}{k!} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum \dfrac{(nx)^k}{k!}$ converge et le reste d'ordre n est bien défini. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0,\ R_n(x) \text{ est bien défini, et } T_n(x) + R_n(x) = e^{nx}.}$$

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{nt}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(k)}(t) = n^k e^{nt}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. En particulier, f est $\mathcal{C}^{n+1}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre n :

$$\underbrace{f(x)}_{=e^{nx}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}.(x-t)^n \,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.x^k}_{=T_n(x)} + \int_0^x \frac{n^{n+1} e^{nt}}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t.$$

D'où : $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^x e^{nt}(x-t)^n \,\mathrm{d}t$.
On effectue le changement de variable $u = x - t$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :

$$\int_0^x e^{nt}(x-t)^n \,\mathrm{d}t = \int_x^0 e^{n(x-u)} u^n \,(-\mathrm{d}u) = e^{nx} \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u$$

et finalement,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad R_n(x) = \frac{n^{n+1} e^{nx}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u.}$$

Soit y un réel strictement positif. On pose :

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}y^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{n^{n+1}y^n} = y\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{y\exp\underbrace{\left[(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})\right]}_{\sim\frac{n+1}{n}\sim 1}}_{\longrightarrow e^1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+1}{a_n} = ye.}$$

Si $y < e^{-1}$, alors $\frac{a_n+1}{a_n} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} ye = \alpha$ avec $|\alpha| < 1$. Dans ce cas, d'après le critère de D'Alembert, la série $\sum a_n$ converge. Et si elle converge, alors nécessairement, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

$$\boxed{\text{Si } y < 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.}$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0,1[$.
La fonction $h : u \mapsto ue^{-u}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée $h'(u) = (1-u)e^{-u}$. Cette dérivée ne s'annulant qu'en 1 et est positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$. Donc h est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Pour tout $u \in [0,x]$, $h(u) \leqslant h(x)$. En posant $M = h(x)$, on voit que M est un maximum de la fonction h sur $[0,x]$. De plus, $M = h(x) < h(1) = e^{-1}$.

$$\boxed{\text{La fonction } u \mapsto ue^{-u} \text{ admet sur } [0,x] \text{ un maximum } M \text{ tel que } M < e^{-1}.}$$

D'après ce que l'on vient de dire, $\int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u \leqslant xM^n$ d'où :
$|R_n(x)| \leqslant e^{nx}xa_n$ où $a_n = \frac{n^{n+1}M^n}{n!}$. Comme $M < e^{-1}$, $xa_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $R_n(x) = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0;1[, \quad R_n(x) = o\left(e^{nx}\right).}$$

On rappelle que $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x)$ d'où $T_n(x) - e^{nx} = o\left(e^{nx}\right)$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0;1[, \quad T_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{nx}.}$$

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

- Initialisation :
$\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$
La propriété est donc vraie au rang initial.
- Hérédité :
Considérons un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Alors $n! \underset{\text{IPP}}{=} \underbrace{\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -\frac{t^{n+1}}{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ d'où $(n+1)n! = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ ce qui conclut la récurrence.

On a donc montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

6. Montrons tout d'abord que $\int_0^{+\infty} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u \frac{n^{n+1}}{n!} = 1$.
Par le changement de variable $nu = t$, on a : $\int_0^{+\infty} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{1}{n^{n+1}}.n!$

$$\begin{aligned}
T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) &= e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u \; - \; e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{x} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u \\
&= e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\left(\int_0^{+\infty} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u - \int_0^{x} \left(ue^{-u}\right)^n \,\mathrm{d}u\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{T_n(x) = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty}\left(ue^{-u}\right)^n \, \mathrm{du}.}$$

7. Si $x > 1$ alors, comme f est décroissante sur $[x, +\infty[$, $ue^{-u} \leqslant xe^{-x}$. En intégrant l'inégalité $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1}ue^{-u}$ entre x et $+\infty$ on obtient $\dfrac{T_n(x)}{e^{nx}} \leqslant \dfrac{n^{n+1}y^n}{n!}M$ avec $y = xe^{-x} < e^{-1}$ et $M = (xe^{-x})^{-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{du}$. Donc $\dfrac{T_n(x)}{e^{nx}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$:

$$\boxed{\text{Si } x > 1, \quad T_n(x) = o(e^{nx}).}$$

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{dt} = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1;1]\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$;

H2 : $f''(0) = -1$;

H3 : Pour tout $x \in]-1;1[\backslash\{0\}, \quad 0 < f(x) < 1$.

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0;1[$.

Pour $x \in]-1;1[\backslash\{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(f(x)\right).$$

8. Supposons que $f'(0) \neq 0$. Alors $f(x) - 1 \sim xf'(0)$ au voisinage de 0. Or le terme de gauche est toujours strictement négatif d'après $(H3)$, tandis que le terme de droite change de signe strictement en 0. C'est absurde.

$$\boxed{f'(0) = 0.}$$

On écrit $f(x) = 1 + g(x)$ avec $g(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ puis $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(1+g(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}.}$$

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Supposons que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ n'est égal à 0. Alors, on peut prolonger φ par continuité sur le segment $[-1;1]$ en posant $\varphi(\pm 1) = -\ln(f(\pm 1))$. φ admet donc un minimum sur $[-1;1]$. Ce minimum - notons le a - est strictement positif puisque φ est elle-même strictement positive sur $[-1;1]$. En particulier, φ minorée sur $]-1;1[$ par a.
Si $f(-1)$ ou $f(1)$ est nul. Supposons par exemple que $f(1) = 0$. Alors φ diverge vers $+\infty$ en 1. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi \geqslant 1$ sur $[1-\varepsilon;1[$. Par ailleurs, φ est continue sur $[0;1-\varepsilon]$, elle y admet donc un minimum $m_1 > 0$. φ est minorée par $a_1 = \min(m_1;1)$ sur $[0;1[$.
De même en -1 si $f(-1) \neq 0$. Si $f(-1) = 0$, on est ramené au cas précédent. Dans tous les cas, φ admet un minorant $a_2 > 0$ sur $]-1:1]$.
On prend $a = \min(a_1;a_2)$. Soit $x \in]-1;1[$. $-\dfrac{1}{x^2}\ln(f(x)) \geqslant a \Rightarrow f(x) \leqslant e^{-ax^2}$. Par continuité des fonctions f et $x \mapsto e^{-ax^2}$ en -1 et 1, cette inégalité reste vraie pour $x = \pm 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est minorée par un réel } a \text{ strictement positif tel que pour tout } x \in [-1;1[\text{, on ait : } f(x) \leqslant e^{-ax^2}.}$$

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n};\sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. La fonction g_n est continue sur $[-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ en tant que composée de fonctions continues. Elle est trivialement continue sur $]-\infty;-\sqrt{n}[$ et sur $]\sqrt{n};+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. À partir d'un certain rang, $u \in [-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ donc :
$g_n(u) = \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-u^2\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}$ APCR. Or $\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = \frac{1}{2}$.
Donc $g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction } g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}.}$$

11. Posons $I_n = \int_{-1}^{1} (f(x))^n \, \mathrm{d}x$. On effectue le changement de variable $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$:

$$I_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{n}}$$

d'où $\sqrt{n}I_n = \int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{TCD}{\longrightarrow}} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}$. Il reste à justifier l'utilisation du théorème de convergence dominée :

- (g_n) est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers une fonction g également continue par morceaux.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$, $|g_n(u)| \leqslant g(u) = e^{-au^2}$. L'inégalité est claire si $u \in]-\infty;-\sqrt{n}[\cup]\sqrt{n},+\infty[$. Sinon, $\frac{u}{\sqrt{n}} \in [-1;1]$ et dans ce cas, on dispose de l'inégalité $f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{-a\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}$ qui élevée à la puissance n nous donne $g_n(u) \leqslant e^{-au^2}$.
- g est une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $a > 0$).

On conclut :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (f(x))^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_{0}^{1} (f(x))^n \, \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \tag{2}$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on redémontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Partons du membre de droite :

$$e^{-n}(I_n + J_n) = \int_{-1}^{+\infty} (1+x)^n e^{-n(x+1)} \, \mathrm{d}x \underset{u=n(x+1)}{=} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{n} = \frac{n!}{n^{n+1}}$$

d'après la question 5.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n).}$$

13. On pose $h : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2^x - x - 1$. h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h'(x) = (\ln 2)2^x - 1$ et $h''(x) = (\ln 2)^2 2^x \geqslant 0$. Donc h' est croissante. Or $h'(1) = 2\ln 2 - 1 \geqslant 0$. Donc h' est positive d'où h est croissante : pour tout $x \geqslant 1, h(x) \geqslant h(1) = 0$ *i.e.* $2^x - x - 1 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 1, \quad x+1 \leqslant 2^x.}$$

D'après ce qui précède, $J_n \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} (2^x)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2 - 1)x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{n(\ln 2-1)x}}{n(\ln 2 - 1)}\right]_1^{+\infty}$.

D'où $J_n \leqslant \dfrac{e^{n(\ln 2 - 1)}}{n(1-\ln 2)} \leqslant \dfrac{1}{n(1-\ln 2)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ J_n \leqslant \frac{C}{n} \text{ où } C = \frac{1}{1-\ln 2}.}$$

14. On pose $f(x) = (1+x)e^{-x}$ de sorte que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(x))^n\,\mathrm{d}x$. f est de classe $\mathcal{C}^2$.

H1 $f(0) = 1$ est clair.

H2 $f''(x) = (-1+x)e^{-x}$ donc on a bien $f''(0) = -1$.

H3 Soit $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$. On a bien $f(x) > 0$. D'autre part, l'inégalité de convexité de l'exponentielle s'écrit $e^x \geqslant x+1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en 0) d'où $f(x) = (1+x)e^{-1} < 1$.

(a) $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1}$. Sachant que $e \approx 2,67$, on a bien $f(-1), f(1) \in [0;1[$.

D'après la question 11 :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.}$$

15. D'après les questions précédentes, $J_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $I_n = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $J_n = o(I_n)$ et $\boxed{I_n + J_n \sim I_n}$. On a alors $n! \sim n^{n+1}e^{-n}I_n \sim n^{n+1}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{-\frac{1}{2}}$ d'où :

$$\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

Fin du problème 1

PROBLÈME 2

D'après

Concours Centrale SupElec

Session 2001 - Filière PC

Épreuve de mathématiques 2

Notations

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on considère $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $E = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ munis des opérations usuelles. Les vecteurs nuls sont notés respectivement 0_V et 0_E.
Si A est une matrice élément de E et W un sous-espace vectoriel de V, $A(W)$ désigne l'ensemble $\{Aw,\ w \in W\}$.

Pour tout sous-ensemble $\mathcal{L}$ de E on s'intéresse aux propriétés suivantes :
P_1 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang 1,
P_2 : $\mathcal{L}$ contient (au moins) une matrice de rang n ,
P_3 : $\mathcal{L}$ contient I,
P_4 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E ,
P_5 : $\mathcal{L}$ est stable par produit de matrices ($(A, B) \in \mathcal{L}^2 \Longrightarrow AB \in \mathcal{L}$),
P_6 : si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W = \{0_V\}$ soit $W = V$.

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A - Dans cette section I.A, $\mathcal{L}$ est l'ensemble des $A \in E$ qui sont inversibles , soit $\mathcal{L} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

I.A.1)

(a) Si (x, y) sont liés, on peut supposer $y = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$. On complète (x) en $(x, x_2, \ldots, x_n)$ base de V. L'endomorphisme dont la matrice associée dans cette base est :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & I_{n-1} \end{array}\right)$$

est inversible et convient.

(b) Si la famille (x, y) est libre, on la complète en $(x, y, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$ base de V. On définit f par $f(x) = y$, $f(y) = x$, et pour tout $3 \leqslant k \leqslant n$, $f(\varepsilon_k) = \varepsilon_k$. La matrice associée à f dans cette base est :

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n-2} \end{array}\right).$$

(c) Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose $W \neq \{0\}$. Alors, pour tout $x \in W \setminus \{0\}$ et pour tout $y \in V$, il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $y = Ax$.
Mais $x \in W$, $A \in \mathcal{L} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et W est $\mathcal{L}$-stable, donc $y \in W$.
Tout élément de V appartient à W, donc $V \subset W$. L'autre inclusion est triviale, donc

$\boxed{P_6 \text{ est vérifiée.}}$

I.A.2) La propriété (P_1) n'est pas vérifiée, car une matrice de rang 1 n'est pas inversible (la dimension de V est supérieure à 2).

La propriété (P_2) est vérifiée, car I est inversible.

La propriété (P_3) est vérifiée, car I est inversible.

La propriété (P_4) n'est pas vérifiée, car $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

La propriété (P_5) est vérifiée, car il est bien connu que le produit de matrices inversibles est encore inversible...

I.B - Dans cette section I.B , $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $T = (t_{k,m}) \in E$ qui sont triangulaires inférieures, c'est-à-dire telles que $m > k \Longrightarrow t_{k,m} = 0$.

I.B.1) Si l'on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base, et si A est triangulaire dans cette base, il vient $Ae_n = a_{n,n}e_n$, ce qui signifie que e_n est vecteur propre associé à la valeur propre $a_{n,n}$.

On en déduit que la propriété (P_6) n'est pas vérifiée, car $\mathrm{Vect}\,(e_n)$ est un sous-espace de dimension 1, stable par tous les éléments de $\mathcal{L}$.

I.B.2) La propriété (P_1) est vérifiée ; par exemple la matrice $E_{n,n}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (tous les coefficients nuls sauf le dernier en bas à droite, qui vaut 1) est triangulaire inférieure.

La propriété (P_2) est vérifiée, car I est triangulaire inférieure et inversible.

La propriété (P_3) est vérifiée, car I est triangulaire inférieure.

La propriété (P_4) est vérifiée ; si A, B sont triangulaires inférieures et λ est un scalaire, $A + \lambda B$ est triangulaire inférieure.

La propriété (P_5) est vérifiée ; il suffit de faire le calcul...

I.C - Dans cette section I.C, $n = 2$ et $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de E pour lequel P_3 et P_4 sont vérifiées.

I.C.1) Soit $A \in \mathcal{L}$.

D'une part, par les propriétés (P_3) et (P_4), $A - \lambda I \in \mathcal{L}$; le rang de cette matrice ne pouvant être 1, il est égal à 2 ou 0 :

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(A - \lambda I) = 0 \text{ ou } 2.}$$

D'autre part, comme on travaille dans $\mathbb{C}$, A admet au moins une valeur propre λ, complexe.
La matrice $A - \lambda I$ n'est alors pas inversible, donc n'est pas de rang 2.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I) = 0$, donc tel que $A = \lambda I$. Ce qui prouve que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des homothéties, car l'inclusion réciproque est immédiate.

I.C.2) Si la propriété (P_1) n'est pas vérifiée, la question précédente entraîne que $\mathcal{L} = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, ce qui entraîne que la propriété (P_6) n'est pas vérifiée, car tous les sous-espaces de V sont stables par une homothétie.

Par contraposée,

$$\boxed{\text{Si } P_6 \text{ est vérifiée, alors } P_1 \text{ est aussi vérifiée.}}$$

Dans toute la suite du problème, P_4 et P_5 sont supposées vérifiées : $\mathcal{L}$ est donc un sous-espace vectoriel de E stable par produit matriciel.

Partie II.

Dans cette partie, les propriétés P_3 et P_6 sont supposées vérifiées par $\mathcal{L}$ (en plus de P_4 et P_5). On veut montrer qu'alors P_1 aussi est vérifiée. On note :

$$m = \min\{\mathrm{rg}\,(M),\ M \in \mathcal{L} \setminus \{0_E\}\}$$

et on se propose de montrer que $m = 1$ ce qui établira P_1.
On suppose dans un premier temps que $m \geqslant 2$. On note alors M_0 un élément de $\mathcal{L}$ qui vérifie $\mathrm{rg}\,(M_0) = m$ et on considère une base $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ de $M_0(V)$. On note $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de V tels que : $\quad \forall i \in [\![1, m]\!],\ M_0 x_i = z_i$.

II.A Notons $U = \{Nz_1 \mid N \in \mathcal{L}\}$. U n'est pas réduit à $\{0\}$, puisque $I \in \mathcal{L}$ implique que $z_1 \in U$. Par la propriété (P_5), U est stable par $\mathcal{L}$. On en déduit par (P_6) que $U = V$. Un calcul immédiat donne $M_0x_1 = z_1$ et $M_1x_1 = z_2$. La famille (z_1, z_2) étant libre, la famille (M_0, M_1) l'est également.

II.B Soit $u \in M_0(V)$. Il existe $x \in V$ tel que $u = M_0x$. Alors :

$$M_0N_0u = M_0(N_0M_0x) \in M_0(V).$$

L'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M_0N_0, restreint à $M_0(V)$, admet au moins une valeur propre $\alpha \in \mathbb{C}$ et un vecteur propre $z \neq 0$ associé, ce qui correspond à la propriété demandée.

On peut écrire $M_1 - \alpha M_0 = (M_0N_0 - \alpha I)M_0 = LM_0$. Ainsi $\mathrm{rg}\,(M_1 - \alpha M_0) = \mathrm{rg}\,(LM_0) \leqslant \mathrm{rg}\,(M_0)$. De plus la matrice L n'étant pas inversible, il vient $\mathrm{rg}\,(M_1 - \alpha M_0) < \mathrm{rg}\,(M_0)$. En effet :

$$\mathrm{rg}\,(M_1 - \alpha M_0) = \mathrm{rg}\,(L|_{\mathrm{Im}\,M_0}) = \mathrm{rg}\,(M_0) - \dim(\mathrm{Ker}\,L \cap \mathrm{Im}\,M_0) < \mathrm{rg}\,(M_0).$$

De plus $\mathrm{rg}\,(M_1 - \alpha M_0) > 0$ car la famille (M_0, M_1) est libre d'après II.A. Si l'on suppose $m \geqslant 2$, on trouve ainsi un élément non nul de de $\mathcal{L}$ de rang strictement inférieur à celui de M_0. C'est une contradiction au choix de M_0. Donc $m = 1$.

Partie III.

Dans cette partie on suppose que $n > 2$ et que la dimension de $\mathcal{L}$ est supérieure ou égale à $n^2 - 1$. On veut montrer que P_3 et P_6 sont vérifiées, puis que $\mathcal{L} = E$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de E stable par produit matriciel.

III.A - Notons :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{M \in E \mid M(W) \subset W\}.$$

Il est aisé de montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E qui contient $\mathcal{L}$, car W est stable par $\mathcal{L}$. Soit W_1 un supplémentaire de W dans V : $V = W \oplus W_1$. C'est un sous-espace de dimension $(n-k)$. Dans une base adaptée à cette décomposition, tout élément de $\tilde{\mathcal{L}}$ s'écrit sous la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right)$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}$ et $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}$.
Ainsi $\tilde{\mathcal{L}}$ est de dimension $n^2 - k(n-k)$. L'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\tilde{\mathcal{L}}$ donne $n^2 - 1 \leqslant n^2 - k(n-k) \Rightarrow k(n-k) \leqslant 1$. Ceci n'est possible que si $k = 0$ ou $k = n$.

III.B -

III.B.1) On a :

$$n^2 \geqslant \dim(\mathcal{H} + \mathcal{L}) = \dim\mathcal{H} + \dim\mathcal{L} - \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geqslant 2 + n^2 - 1 - \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}).$$

Ceci entraîne que $\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \geqslant 1$. Soit $M \in \mathcal{H} \cap \mathcal{L}, M \neq 0$. On peut écrire $M = \alpha I + \beta E_{k,m}$, avec $\alpha \neq 0$ car autrement on aurait $E_{k,m} \in \mathcal{L}$. Donc M est inversible et appartient à $\mathcal{L}$.

III.B.2) On suppose ici que c'est le contraire de (*) qui est vrai, donc $k \neq m \Rightarrow E_{k,m} \in \mathcal{L}$.

(a) On note J la matrice à n lignes et n colonnes, dont tous les coefficients valent 1 : $J = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{i,j}$.

La matrice J est clairement de rang 1, ce qui implique en particulier que son noyau est de dimension $n-1$, et donc que 0 est valeur propre de J d'ordre de multiplicité au moins $n-1$. En observant les colonnes de J, on peut choisir tous les $E_1 - E_j$, $2 \leqslant j \leqslant n$, comme vecteurs propres de J associés à la valeur propre 0 et linéairement indépendants.

J admet au total n valeurs propres (dans $\mathbb{C}$ a priori) et nous en avons déjà identifiées $n-1$, qui de plus sont réelles. Le polynôme caractéristique de J est scindé sur $\mathbb{C}$, mais à coefficients réels, donc la dernière valeur propre λ est aussi nécessairement réelle. On l'obtient par exemple à l'aide de la trace de J :

$$\operatorname{tr}(J) = n = \underbrace{0 + \cdots + 0}_{n-1\ fois} + \lambda$$

d'où $\lambda = n$. Cette dernière valeur propre est nécessairement simple, et son sous-espace propre associé est donc de dimension 1.

Avec un minimum d'observation, on voit que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $JX = nX$ et constitue donc une base du sous-espace propre de J pour la valeur propre n. Ainsi,

$$\boxed{n \text{ est valeur propre simple de } J \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ constitue une base de } \operatorname{Ker}(J - nI).}$$

Par ailleurs

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre d'ordre } n-1 \text{ de } J \text{ et } (E_1 - E_i)_{2\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base de } \operatorname{Ker}(J).}$$

(b) Notons $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} E_{i,j}$. On remarque que $M = J - I$.

μ est valeur propre de M et $Y \neq 0$ vecteur propre associé si, et seulement si, $MY = \mu Y$, soit $JY - Y = \mu Y$, ou encore $JY = (\mu+1)Y$. Donc $\mu \in \operatorname{Sp}(M)$ équivaut à $\mu + 1 \in \operatorname{Sp}(J)$.

Ainsi, le spectre de M se déduit rapidement de celui de J :

$$\operatorname{Sp}(M) = \{\mu = \lambda - 1,\ \lambda \in \operatorname{Sp}(J)\} = \{-1, n-1\}$$

et pour une valeur propre μ de M, les vecteurs propres associés sont ceux associés à la valeur propre $\mu + 1$ de J :

$$\operatorname{Ker}(M + I) = \operatorname{Ker} J = \operatorname{Vect}\,(E_1 - E_i,\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$$

$$\operatorname{Ker}(M - (n-1)I) = \operatorname{Ker}(J - nI) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier, 0 n'est pas valeur propre de M, donc

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

De plus, la matrice M ainsi construite est combinaison linéaire de matrices $E_{k,m}$ pour $k \neq m$, donc elle appartient à $\mathcal{L}$.

Dans les deux cas, on a trouvé une matrice inversible appartenant à $\mathcal{L}$. On note désormais A cette matrice.

III.C - On a

$$\operatorname{Card}(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1}) = n^2 + 1 > n^2$$

La famille $(A, A^2, \ldots, A^{n^2+1})$ est donc liée. Notons

$$p + 1 = \min\{k \geqslant 2 \mid (A, A^2, \ldots, A^k) \text{ est liée}\}.$$

Il existe des scalaires $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ non tous nuls (et $\lambda_p \neq 0$ par choix de p) tels que

$$\lambda_0 A + \lambda_1 A^2 + \cdots + \lambda_p A^{p+1} = 0.$$

La matrice A étant inversible, il vient :

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \cdots + \lambda_p A^p = 0.$$

On a $\lambda_0 \neq 0$ car autrement on obtient une contradiction au choix de p. Comme $\lambda_0 \neq 0$, et par les propriétés (P_3, P_4), on a $I \in \mathcal{L}$.

Fin du problème 2