Corrigé du Concours Blanc

Problème 1 (extrait de Mines 2017 – PC)

I - Exponentielle tronquée

On a $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$ et :

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$, donc pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$e^{nx}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n^k x^k}{k!}.$$

Ainsi :

$$\boxed{R_n(x) \text{ existe et } T_n(x)+R_n(x)=e^{nx}.}$$

2. La fonction $f:t\mapsto e^{nt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}:t\mapsto n^k e^{nt}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre *n*, entre 0 et *x*, ce qui donne :

$$f(x)=e^{nx}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}n^{n+1}e^{nt}dt.$$

Avec $T_n(x)+R_n(x)=e^{nx}$, soit $R_n(x)=e^{nx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k x^k}{k!}$, on obtient :

$$R_n(x)=e^{nx}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k x^k}{k!}=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}n^{n+1}e^{nt}dt=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x(x-t)^n e^{nt}dt.$$

Et en posant $u=x-t$ (la fonction $t\mapsto x-t$ est de classe C^1 et bijective de $[0,x]$ dans $[0,x]$), on obtient :

$$R_n(x)=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^0 u^n e^{n(x-u)}(-du)=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x u^n e^{nx}e^{-nu}du.$$

Soit :

$$\boxed{R_n(x)=e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x(u\,e^{-u})^n du}$$

3. On prend $y\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_n=\frac{n^{n+1}}{n!}y^n\neq 0$ et :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^{n+2}}{(n+1)!}y^{n+1}}{\frac{n^{n+1}}{n!}y^n}=\frac{(n+1)^{n+2}n!}{n^{n+1}(n+1)!}y=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}y=\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}y.$$

Et, $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=n\left(\dfrac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)=1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e$ et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\,y}$$

Si $y<e^{-1}$, alors comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n$ converge et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}a_n=0}$$

4. La fonction $u\mapsto u\,e^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions, de dérivée $u\mapsto(1-u)\,e^{-u}$. Cette dérivée est positive sur $[0,1]$ et ne s'annule qu'en 1, donc $u\mapsto u\,e^{-u}$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

Avec $x\in\,]0,1[$, on a pour tout $u\in[0,x]\subset[0,1[$:

$$u\,e^{-u}\le x\,e^{-x}<1e^{-1}=e^{-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } u\mapsto u\,e^{-u} \text{ admet sur } [0,x] \text{ un maximum } M=x\,e^{-x}<e^{-1}.}$$

On a vu dans la question 2 que $R_n(x)=e^{nx}\dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^x(u\,e^{-u})^n\,du$.

Comme pour tout $u\in[0,x]$, on a $0\le u\,e^{-u}\le M$, on peut écrire :

$$0\le R_n(x)\le e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x M^n\,du=e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}M^n.$$

Comme $M<e^{-1}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{n+1}}{n!}M^n=0$ d'après la question précédente, et donc :

$$\boxed{R_n(x)=\underset{n\to+\infty}{o}(e^{nx})}$$

D'après la question 1, on a $T_n(x)=e^{nx}-R_n(x)$, donc $T_n(x)=e^{nx}+\underset{n\to+\infty}{o}(e^{nx})$, soit :

$$\boxed{T_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}e^{nx}}$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt$. Remarquons que, par croissances comparées, $t^ne^{-t}=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc l'intégrale I_n est bien définie.

Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^X t^{n+1}e^{-t}dt = \left[t^{n+1}(-e^{-t})\right]_0^X - \int_0^X (n+1)t^n(-e^{-t})dt = -X^{n+1}e^{-X} + (n+1)\int_0^X t^n e^{-t}dt\,.$$

Et comme $\lim_{X \to +\infty} X^{n+1}e^{-X} = 0$, on obtient en passant à la limite quand $X \to +\infty$:

$$I_{n+1} = (n+1)I_n\,.$$

Remarquons que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par croissance stricte de l'intégrale, on a $I_n > 0$, donc $I_n \neq 0$ et on peut écrire par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{I_n}{I_0} = \prod_{k=1}^{n} \frac{I_k}{I_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} k = n! \quad \Rightarrow \quad I_n = I_0 n!$$

Enfin, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$, soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(u\,e^{-u})^n = u^n e^{-nu} \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du$ converge et :

$$\begin{aligned}
T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) &= e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x (u\,e^{-u})^n du \\
&= e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\left[\int_0^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du - \int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du\right] \\
&= e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du + e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du
\end{aligned}$$

Or, en posant $t = nu$ (la fonction $u \mapsto nu$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ car $n > 0$), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du = \int_0^{+\infty} u^n\,e^{-nu}du = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\,\frac{1}{n}dt = \frac{1}{n^{n+1}}\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}dt = \frac{n!}{n^{n+1}}\,.$$

Donc :

$$T_n(x) = e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\frac{n!}{n^{n+1}} + e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du = e^{nx} - e^{nx} + e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du\,.$$

Soit finalement :

$$\boxed{T_n(x) = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n du}$$

7. On prend $x > 1$.

On a vu dans la question 4 que la fonction $u \mapsto u\,e^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u \mapsto (1-u)e^{-u}$. Cette dérivée est négative sur $[x, +\infty[\, \subset [1, +\infty[$, donc $u \mapsto u\,e^{-u}$ est décroissante (et positive) sur $[x, +\infty[$.

Alors, pour tout $u \in [x, +\infty[$, on a $0 \leq u\,e^{-u} \leq x\,e^{-x}$ et, tel que conseillé, on peut écrire :

$$0 \leq (u\,e^{-u})^n = (u\,e^{-u})^{n-1}(u\,e^{-u}) \leq (x\,e^{-x})^{n-1}(u\,e^{-u})\,.$$

En intégrant (on a vu que toutes les intégrales convergent), on obtient :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n\,du \leq (x\,e^{-x})^{n-1} \int_x^{+\infty} u\,e^{-u}\,du\,.$$

On montre comme dans la question 5, que $\int_x^{+\infty} u\,e^{-u}du = (x+1)\,e^{-x}$ et donc :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n\,du \leq (x\,e^{-x})^{n-1}(x+1)\,e^{-x} = x^{n-1}(x+1)\,e^{-nx}\,.$$

Alors :

$$0 \leq \frac{T_n(x)}{e^{nx}} \leq x^{n-1}(x+1)\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-nx}\,.$$

Et, avec la formule de Stirling, on a :

$$x^{n-1}(x+1)\frac{n^{n+1}}{n!}e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} x^{n-1}(x+1)\frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}e^{-nx} = \frac{x+1}{\sqrt{2\pi}}x^{n-1}\sqrt{n}e^{-n(x-1)} = \frac{x+1}{\sqrt{2\pi}}x^{n-1}e^{-n\frac{x-1}{2}}\sqrt{n}\,e^{-n\frac{x-1}{2}}\,.$$

Enfin, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n-1}e^{-n\frac{x-1}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,e^{-n\frac{x-1}{2}} = 0$ car $\dfrac{x-1}{2} > 0$.

Avec le théorème des gendarmes, on obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n(x)}{e^{nx}} = 0$, soit :

$$\boxed{T_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}(e^{nx})}$$

II - Méthode de Laplace

8. On a :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}\,.$$

Or, pour tout $x \in\,]-1,0[\, \cup\,]0,1[$, $f(x)-1<0$, donc :

- $x \in\,]-1,0[\;\Rightarrow\; \dfrac{f(x)-1}{x} > 0 \;\Rightarrow\; f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x} \geq 0$;
- $x \in\,]0,1[\;\Rightarrow\; \dfrac{f(x)-1}{x} < 0 \;\Rightarrow\; f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x} \leq 0$.

Ainsi, $f'(0) \geq 0$ et $f'(0) \leq 0$, donc :

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

Comme f est de classe C^2 sur $[-1,1]$, on peut appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\,.$$

Avec $f(0)=1$, $f'(0)=0$ et $f''(0)=-1$, ceci donne :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\,.$$

Alors :

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = -\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}}$$

9. La fonction φ est continue sur $]-1,0[\,\cup\,]0,1[$ en tant que produit de telles fonctions et prolongée par continuité en 0, donc elle est continue sur $]-1,1[$.

De plus, pour tout $x \in\,]-1,0[\,\cup\,]0,1[$, $0 < f(x) < 1$, donc $\varphi(x) > 0$ et $\varphi(0) = \frac{1}{2} > 0$, donc $\varphi > 0$ sur $]-1,1[$.

On a $f(-1) \in [0,1[$ et *f* est continue en – 1.

- Si $f(-1) \neq 0$, alors $f(-1) \in\,]0,1[$ et $\lim\limits_{x\to -1^+}\varphi(x) = -\ln\big(f(-1)\big) > 0$.

  La fonction φ peut donc être prolongée par continuité en – 1 en une fonction continue et strictement positive sur $[-1,0]$, qui atteint un minimum $m_1 > 0$.

- si $f(-1) = 0$, alors, $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln\big(f(x)\big) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+}\varphi(x) = +\infty$.

  Alors, il existe $a \in\,]-1,0[$ tel que pour tout $x \in\,]-1,a[$, $\varphi(x) > 1$ et φ est continue et strictement positive sur $[a,0]$, donc atteint un minimum $0 < m_1 \le \varphi(0) < 1$. Alors, $m_1 > 0$ est minimum sur $]-1,0]$.

Finalement, on a trouvé dans les deux cas, un minorant $m_1 > 0$ de φ sur $]-1,0]$.

Avec $f(1) \in [0,1[$ et *f* est continue en 1, on prouve de même que φ est minorée par un réel $m_2 > 0$ sur $[0,1[$.

En posant $m = \min(m_1, m_2) > 0$:

$$\boxed{\varphi \text{ est minorée par un réel } m > 0 \text{ sur }]-1,1[.}$$

On a alors pour tout $x \in\,]-1,1[$, $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big) \ge m$, soit :

$$\ln\big(f(x)\big) \le -mx^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \le e^{-mx^2}.$$

Comme *f* est continue en – 1 et 1, l'inégalité ci-dessus perdure en passant à la limite en en – 1 et 1 et ainsi, en posant $a = m > 0$:

$$\boxed{\text{Il existe un réel } a > 0 \text{ tel que } f(x) \le e^{-ax^2} \text{ pour tout } x \in [-1,1].}$$

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in \left[-\sqrt{n}, \sqrt{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction *f* est continue sur $[-1,1]$ (par hypothèse) et pour tout $u\in\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$, $\dfrac{u}{\sqrt{n}}\in[-1,1]$, donc g_n est continue sur $\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$ en tant que composée de fonctions continues. Ceci implique entre autres que g_n admet des limites finies en $-\sqrt{n}^{\,+}$ et $\sqrt{n}^{\,-}$.

De plus, la fonction nulle, donc g_n, est continue sur $\left]-\infty,-\sqrt{n}\right]$ et sur $\left[\sqrt{n},+\infty\right[$. Ceci implique entre autres que g_n admet des limites finies en $-\sqrt{n}^{\,-}$ et $\sqrt{n}^{\,+}$.

Finalement, g_n est continue sur $\left]-\infty,-\sqrt{n}\right]$, $\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$ et $\left[\sqrt{n},+\infty\right[$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $u\in\mathbb{R}$. Il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $|u|\leq\sqrt{N}$ (il suffit de prendre $N=E(u^2)+1$).

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n\geq N$, on a $u\in\left[-\sqrt{N},\sqrt{N}\right]\subset\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$, donc :

$$g_n(u)=\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=e^{n\ln\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)}=e^{-u^2\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Or, on a vu que $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}$ et ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}g_n(u)=e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } g:u\mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}.}$$

11. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $u\in\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$, on a $\dfrac{u}{\sqrt{n}}\in[-1,1]$, donc, d'après la question 9 :

$$0\leq f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\leq e^{-a\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}=e^{-\frac{au^2}{n}}\quad\Rightarrow\quad |g_n(u)|=g_n(u)=\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\leq e^{-au^2}.$$

Remarquons que pour tout $u\in\mathbb{R}\setminus\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$, on a $|g_n(u)|=0\leq e^{-au^2}$, donc pour tout $u\in\mathbb{R}$:

$$|g_n(u)|\leq e^{-au^2}.$$

De plus, $h:u\mapsto e^{-au^2}$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $h(u)=\underset{u\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, donc h est intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, on a alors :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g:u\mapsto e^{-u^2/2}$, qui est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Il existe une fonction *h*, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $u\in\mathbb{R}$, on a $|g_n(u)|\leq h(u)$.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, les fonctions g_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (on le savait !) et :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2\pi}\,.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n du\,.$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{u}{\sqrt{n}}$ est de classe C^1 et bijective de $\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$ dans $[-1,1]$), donc, en posant le changement de variable $t = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,du = \int_{-1}^{1} \left(f(t)\right)^n \sqrt{n}\,dt = \sqrt{n}\int_{-1}^{1} \left(f(t)\right)^n dt\,.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\int_{-1}^{1} \left(f(t)\right)^n dt = \sqrt{2\pi}$, soit :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \left(f(t)\right)^n dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

III - Formule de Stirling

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx\,.$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto (x+1)^n e^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $(x+1)^n e^{-nx} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc I_n et J_n sont bien définies et :

$$I_n + J_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n e^{-nx} dx + \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx = \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx\,.$$

La fonction $x \mapsto n(x+1)$ est de classe C^1 et bijective de $\left[-1,+\infty\right[$ dans $\left[0,+\infty\right[$), donc, en posant le changement de variable $t = n(x+1)$, on obtient :

$$I_n + J_n = \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n e^{-t+n} \frac{1}{n} dt = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_{0}^{+\infty} t^n e^{-t} dt\,.$$

Enfin, à l'aide de la question 5, on obtient :

$$I_n + J_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} n!$$

Soit :

$$\boxed{n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n)}$$

13. Posons $\alpha(x)=2^x-x-1=e^{x\ln 2}-x-1$.

La fonction α est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que différence de telles fonctions, et pour tout $x\in[1,+\infty[$:

$$\alpha'(x)=2^x\ln 2-1\geq 2\ln 2-1>0.$$

Donc, α est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, d'où, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\alpha(x)\geq\alpha(1)=0$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in[1,+\infty[,\ 2^x\geq x+1.}$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in[1,+\infty[$:

$$0\leq x+1\leq 2^x \quad\Rightarrow\quad 0\leq (x+1)^n e^{-nx}\leq 2^{xn}e^{-nx}=e^{-n(1-\ln 2)x}$$

Comme $n(1-\ln 2)>0$, $\int_1^{+\infty}e^{-n(1-\ln 2)x}dx$ converge et :

$$0\leq J_n=\int_1^{+\infty}(x+1)^n e^{-nx}dx\leq\int_1^{+\infty}e^{-n(1-\ln 2)x}dx=\left[-\frac{1}{n(1-\ln 2)}e^{-n(1-\ln 2)x}\right]_1^{+\infty}.$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{0\leq J_n\leq\frac{e^{-n(1-\ln 2)}}{n(1-\ln 2)}=\frac{2^n e^{-n}}{n(1-\ln 2)}}$$

14. On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$I_n=\int_{-1}^{1}(x+1)^n e^{-nx}dx=\int_{-1}^{1}\left((x+1)e^{-x}\right)^n dx=\int_{-1}^{1}\left(f(x)\right)^n dx$$

avec $f(x)=(x+1)e^{-x}$.

Alors, si *f* vérifie toutes les hypothèses de la partie II, on pourra utiliser le résultat de la question 11.

La fonction *f* est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (en tant que produit de telles fonctions), donc elle est bien de classe C^2 sur $[-1,1]$, avec $f'(x)=-xe^{-x}$ et $f''(x)=(x-1)e^{-x}$. De plus :

- **H1** : $f(0)=(0+1)e^0=1$;
- **H2** : $f''(0)=(0-1)e^0=-1$;
- **H3** : pour tout $x\in]-1,1[$:

$$x\in]-1,0[\quad\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{l}0<x+1<1\\ 0<e^{-x}<1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad 0<f(x)=(x+1)e^{-x}<1$$

$$x\in]0,1[\quad\Rightarrow\quad f'(x)=-xe^{-x}<0\quad\Rightarrow\quad 0<f(1)=2e^{-1}<f(x)<f(0)=1$$

  Donc, pour tout $x\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $0<f(x)<1$;

- **H4** : $f(-1)=0\in[0,1[$ et $f(1)=2e^{-1}\in[0,1[$.

Ainsi, *f* vérifie bien toutes les hypothèses de la partie II, donc, d'après la question 11 :

$$\boxed{I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

14. On a $\dfrac{2^n e^{-n}}{n(1-\ln 2)} = \dfrac{1}{1-\ln 2}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{e}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, donc l'encadrement de J_n obtenu dans la question 13, donne immédiatement :

$$J_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}$, on a :

$$I_n + J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}.$$

La relation $n! = n^{n+1}e^{-n}(I_n + J_n)$ obtenue dans la question 12 donne alors :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{n+1}e^{-n}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n n\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}.$$

Soit :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Problème 2 (extrait et adapté de Centrale 2001 – PC)

On prend $n \geq 2$. On note :

- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $V = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$;
- $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de V ;
- $E_{k,m} = \left(\delta_{k,i}\delta_{m,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, $I = I_n$;
- $A(W) = \left\{Aw, w \in W\right\}$.

Partie I - Étude de quelques exemples

I.A. $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$.

I.A.1) On prend $x, y \in V \setminus \{0\}$.

- Si la famille (x, y) est liée, alors on peut compléter x en une base $\mathcal{B} = (x, x_2, \dots, x_n)$.

  On définissant $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $f(x) = y$ et $f(x_k) = x_k$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a :

  $$f(\mathcal{B}) = \left(f(x), f(x_2), \dots, f(x_n)\right) = \left(y, x_2, \dots, x_n\right).$$

  Comme y est colinéaire à x et non nul, $\mathrm{Vect}\left(f(\mathcal{B})\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{B}\right)$, donc $f(\mathcal{B})$ est encore une base de V et ainsi, $f \in GL(V)$. On a donc bien :

  $$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } Ax = y.$$

- Si la famille (x, y) est libre, alors on peut la compléter (s'il y a lieu) en une base $\mathcal{B} = (x, y, x_3, \dots, x_n)$.

  On posant alors $f \in \mathcal{L}(V)$ tel que $f(x) = y$, $f(y) = x$ et $f(x_k) = x_k$ pour tout $k \in [\![3, n]\!]$ (si $n \geq 3$), on a :

$$f(\mathcal{B}) = \big(f(x), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)\big) = \big(y, x, x_3, \dots, x_n\big).$$

  On a $\mathrm{Vect}\big(f(\mathcal{B})\big) = \mathrm{Vect}\big(\mathcal{B}\big)$, donc $f(\mathcal{B})$ est encore une base de V et ainsi, $f \in GL(V)$. On a donc bien :

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } Ax = y.$$

Ainsi, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Il existe } A \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } Ax = y.}$$

On veut vérifier la propriété P_6 pour $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$: si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $GL_n(\mathbb{C})$, alors soit $W = \{0_V\}$, soit $W = V$.

Soit W est un sous-espace vectoriel de V différent de $\{0_V\}$ et stable par $GL_n(\mathbb{C})$, autrement dit, $A(W) = \{Aw, w \in W\} \subset W$ pour toute $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On veut prouver que $W = V$.

Comme $W \subset V$ et $0_V \in W$ (car W est un sous-espace vectoriel de V), il suffit de prouver que tout vecteur non nul de V appartient à W.

Comme $W \neq \{0_V\}$, il existe $x \in W$ tel que $x \neq 0_V$.

Alors, d'après le résultat précédent, pour tout $y \in V \setminus \{0_V\}$, il existe $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $Ax = y$ et, comme $\{Aw, w \in W\} \subset W$, on a $y = Ax \in W$, donc tout vecteur non nul de V appartient à W. Ainsi, $W = V$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La propriété } P_6 \text{ est vérifiée pour } \mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C}).}$$

I.A.2) Toute matrice de $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$ est de rang $n \geq 2$, donc différent de 1 : la propriété P_1 n'est pas vérifiée.

La matrice I est inversible, donc appartient à $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$ et elle est de rang n : les propriétés P_2 et P_3 sont vérifiées.

La matrice nulle n'appartient pas à $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$, donc $\mathcal{L}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E : la propriété P_4 n'est pas vérifiée.

Le produit de deux matrices inversibles est inversible (la composée de deux bijection est bijective), donc $\mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C})$ est stable par produit de matrices : la propriété P_5 est vérifiée.

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour } \mathcal{L} = GL_n(\mathbb{C}) \text{, les propriétés } P_2,\ P_3,\ P_5 \text{ et } P_6 \text{ sont vérifiées et pas } P_1 \text{ et } P_4.}$$

I.B. $\mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$.

I.B.1) Soit $T \in \mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$. La dernière colonne de T est :

$$Te_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_{n,n} \end{pmatrix} = t_{n,n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t_{n,n} e_n .$$

Comme $e_n \neq 0$:

$$\boxed{\text{Le vecteur } e_n \text{ est un vecteur propre de } T \text{ (associé à la valeur propre } t_{n,n}\text{).}}$$

Si on pose $W = \text{Vect}(e_n)$, on a pour tout $x \in W$, $x = \lambda e_n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et :

$$Tx = T(\lambda e_n) = \lambda T(e_n) = \lambda t_{n,n} e_n \in W .$$

Ainsi, W est stable par T, et ceci pour toute matrice $T \in \mathcal{L}$, donc W est stable par $\mathcal{L}$.

Or, W est une droite, donc distinct de $\{0_V\}$ et V (car $\dim V = n \geq 2$). Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{Pour } \mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C}) \text{, la propriété } P_6 \text{ n'est pas vérifiée.}}$$

I.B.2) La matrice $E_{n,n}$ est de rang 1 et appartient à $\mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$: la propriété P_1 est vérifiée.

La matrice I est triangulaire inférieure, donc appartient à $\mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$, et elle est de rang n : les propriétés P_2 et P_3 sont vérifiées.

La matrice nulle appartient à $\mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$ et toute combinaison linéaire de matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure donc $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E : la propriété P_4 est vérifiée.

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure, donc $\mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C})$ est stable par produit de matrices : la propriété P_5 est vérifiée.

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour } \mathcal{L} = \mathcal{T}_n^{\inf}(\mathbb{C}) \text{, les propriétés } P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4 \text{ et } P_5 \text{ sont vérifiées et pas } P_6.}$$

I.C. Ici $n = 2$ et $\mathcal{L} \subset E$ est tel que P_3 et P_4 sont vérifiées : $I \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E.

I.C.1) Comme le rang d'une matrice 2×2 est 0, 1 ou 2, si P_1 n'est pas vérifiée, toute matrice de $\mathcal{L}$ est soit de rang 0, c'est-à-dire est la matrice nulle, soit de rang 2, c'est-à-dire inversible.

Soit $A \in \mathcal{L}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $I \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $A - \lambda I \in \mathcal{L}$ et ainsi :

$$\boxed{rg\left(A - \lambda I\right) = 0 \text{ ou } 2}$$

Remarquons que, comme $I \in \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda I \in \mathcal{L}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Donc :

$$\{\lambda I, \lambda \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{L} .$$

Soit maintenant $A \in \mathcal{L}$.

Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}$, donc admet au moins une racine réelle $\lambda \in \mathbb{C}$ (autrement dit A admet au moins une valeur propre). Alors, d'après le théorème du rang :

$$rg\left(A-\lambda I\right)=2-\dim\ker\left(A-\lambda I\right)\leq 1.$$

D'après ce qui précède, ceci veut dire que $rg\left(A-\lambda I\right)=0$, donc que $A-\lambda I=0_2$, soit $A=\lambda I$.

Donc :

$$\mathcal{L}\subset\left\{\lambda I,\lambda\in\mathbb{C}\right\}.$$

Finalement, $\mathcal{L}=\left\{\lambda I,\lambda\in\mathbb{C}\right\}$ et donc :

$\boxed{\mathcal{L} \text{ est l'ensemble des homothéties vectorielles.}}$

I.C.2) On suppose que P_6 est vérifiée par $\mathcal{L}$.

Supposons que P_1 ne soit pas vérifiée. Alors, d'après la question précédente, $\mathcal{L}=\left\{\lambda I,\lambda\in\mathbb{C}\right\}$.

Soit $D=\text{Vect}(x)$, avec $x\neq 0_V$, une droite de V. Pour toute $A\in\mathcal{L}$, il existe $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $A=\lambda I$.

Mais alors, pour tout $k\in\mathbb{C}$, $A(kx)=\lambda(kx)=\lambda kx\in D$, donc D est stable par toute matrice de $\mathcal{L}$.

Or, $D\neq\left\{0_V\right\}$ et $D\neq V$, donc la propriété P_6 est contredite, ce qui est absurde.

Ainsi :

$\boxed{\text{Si } P_6 \text{ est vérifiée par } \mathcal{L},\ P_1 \text{ l'est aussi.}}$

Partie II

Ici, P_3, P_4, P_5 et P_6 sont vérifiées : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par produit matriciel, contenant I et tel que si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\mathcal{L}$, alors soit $W=\left\{0_V\right\}$, soit $W=V$.

$$m=\min\left\{rg(M),M\in\mathcal{L}\setminus\left\{0_E\right\}\right\}.$$

Si $m\geq 2$, on prend $M_0\in\mathcal{L}$ telle que $rg(M_0)=m$ et $(z_1,z_2,\ldots,z_m)$ une base de $M_0(V)=\operatorname{Im}M_0$.

Enfin, pour tout $k\in[\![1,m]\!]$, $x_k\in V$ et $M_0x_k=z_k$.

II.A. Soit $W=\left\{Nz_1,N\in\mathcal{L}\right\}\subset V$.

Comme $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, il est non vide, donc W est non vide.

Soient $N,N'\in\mathcal{L}$ et $\lambda,\lambda'\in\mathbb{C}$. On a $\lambda N+\lambda' N'\in\mathcal{L}$ (toujours car $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E), donc $(\lambda N+\lambda' N')z_1=\lambda Nz_1+\lambda' N' z_1\in W$.

Ainsi, W est stable par combinaisons linéaires, donc W est un sous-espace vectoriel de V.

De plus, pour tout $M\in\mathcal{L}$ et tout $Nz_1\in W$ (avec $N\in\mathcal{L}$), on a $MN\in\mathcal{L}$ (car $\mathcal{L}$ est stable par produit matriciel), donc $M(Nz_1)=(MN)z_1\in W$.

Ainsi, W est stable par $\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ vérifie P_6 :

$$W=\left\{0_V\right\} \text{ ou } W=V.$$

Enfin, $\mathcal{L}$ vérifie P_3 donc $I \in \mathcal{L}$ et $z_1 = Iz_1 \in W$. Or, z_1 fait partie d'une base donc n'est pas nul et ainsi :

$$W \neq \{0_V\}.$$

Finalement :

$$\boxed{W = \{Nz_1, N \in \mathcal{L}\} = V}$$

On a $N_0 \in \mathcal{L}$ telle que $N_0 z_1 = x_2$ (N_0 existe d'après le résultat précédent) et $M_1 = M_0 N_0 M_0$.

Comme $rg(M_0) = m \geq 2$, $M_0 \neq 0_n$ donc si la famille (M_0, M_1) est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $M_1 = \lambda M_0$.

Or, $M_0 N_0 M_0 x_1 = M_0 N_0 z_1 = M_0 x_2 = z_2$, donc :

$$M_0 N_0 M_0 = \lambda M_0 \quad \Rightarrow \quad M_0 N_0 M_0 x_1 = \lambda M_0 x_1 \quad \Leftrightarrow \quad z_2 = \lambda z_1.$$

Donc, z_1 et z_2 sont colinéaires, ce qui est absurde car ils font partie d'une base, donc d'une famille libre.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La famille } (M_0, M_1) \text{ est libre.}}$$

II.B. Comme $N_0 M_0(V) \subset V$, on a :

$$M_0 N_0 \left(M_0(V)\right) = M_0 \left(N_0 M_0(V)\right) \subset M_0(V).$$

Donc :

$$\boxed{M_0(V) \text{ est stable par } M_0 N_0.}$$

Comme $M_0(V)$ est stable par $M_0 N_0$, on peut définir U l'endomorphisme induit par $M_0 N_0$ sur $M_0(V)$.

Or, $\dim\left(M_0(V)\right) = rg(M_0) = m \geq 2$, donc le polynôme caractéristique de U est degré au moins 2 : il admet au moins une racine α. Autrement dit : U admet au moins une valeur propre α. Si $z \in M_0(V)$ est un vecteur propre associé, on a $z \neq 0_V$ et :

$$Uz = M_0 N_0 z = \alpha z.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe } (\alpha, z) \in \mathbb{C} \times M_0(V) \text{ tel que } z \neq 0_V \text{ et } M_0 N_0 z = \alpha z.}$$

Comme $M_1 = M_0 N_0 M_0$, on a $M_1 - \alpha M_0 = M_0 N_0 M_0 - \alpha M_0 = (M_0 N_0 - \alpha I) M_0$ et donc :

$$\ker\left(M_0\right) \subset \ker\left(M_1 - \alpha M_0\right).$$

Comme $z \in M_0(V)$, il existe $x \in V$ tel que $z = M_0 x$, avec $x \neq 0_V$ car $z \neq 0_V$. On a alors :

$$M_0 N_0 z = \alpha z \quad \Leftrightarrow \quad M_0 N_0 M_0 x = \alpha M_0 x \quad \Leftrightarrow \quad M_1 x = \alpha M_0 x \quad \Leftrightarrow \quad (M_1 - \alpha M_0) x = 0_V.$$

Donc, $x \in \ker\left(M_1 - \alpha M_0\right)$ et $M_0 x = z \neq 0_V$, donc $x \notin \ker\left(M_0\right)$.

Ceci prouve que l'inclusion de $\ker(M_1-\alpha M_0)$ dans $\ker(M_0)$ est stricte, donc que :

$$\dim(\ker(M_0))<\dim(\ker(M_1-\alpha M_0)).$$

Avec le théorème du rang, on obtient $n-rg(M_0)<n-rg(M_1-\alpha M_0)$, soit :

$$\underline{rg(M_1-\alpha M_0)<rg(M_0)}.$$

De plus, $rg(M_1-\alpha M_0)\geq 0$ et si $rg(M_1-\alpha M_0)=0$, alors $M_1-\alpha M_0=0_n$ et donc la famille (M_0,M_1) est liée. Ceci contredit le résultat de la question précédente, donc $rg(M_1-\alpha M_0)\neq 0$ et ainsi :

$$\underline{rg(M_1-\alpha M_0)>0}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{0<rg(M_1-\alpha M_0)<rg(M_0)}$$

On a $M_0\in\mathcal{L}$ et $N_0\in\mathcal{L}$. Comme $\mathcal{L}$ est stable par produit matriciel, $M_1=M_0N_0M_0\in\mathcal{L}$.

Alors, comme $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E, $M_1-\alpha M_0\in\mathcal{L}$.

Enfin, comme $M_1-\alpha M_0\neq 0_n$, on a $M_1-\alpha M_0\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}$ et donc :

$$rg(M_1-\alpha M_0)\geq\min\{rg(M),M\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}\}=m=rg(M_0).$$

Ceci contredit le résultat précédent. Ainsi, l'hypothèse $m\geq 2$ mène à une contradiction, donc :

$$\underline{m\leq 1}.$$

Or, $\{rg(M),M\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}\}$ contient $rg(I)=n$, car $\mathcal{L}$ vérifie P_3 donc $I\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}$.

Alors, $\{rg(M),M\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et comme $m=\min\{rg(M),M\in\mathcal{L}\backslash\{0_E\}\}$, on a :

$$\underline{m\geq 1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{m=1}$$

Partie III

Ici, $n\geq 3$ et $\mathcal{L}$ vérifie P_4 et P_5 : $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de *E*, stable par produit matriciel.

On suppose que :

$$\dim\mathcal{L}\geq n^2-1=\dim E-1.$$

III.A. Posons $F=\{M\in E, M(W)\subset W\}$.

Par définition, $F\subset E$ et $0_n(W)=\{0_V\}\subset W$ donc $0_n\in F$.

Pour tout $(M,N)\in F^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, on a $M(W)\subset W$ et $N(W)\subset W$, donc $(\lambda M+\mu N)(W)\subset W$ (car *W* est stable par combinaisons linéaires). Ainsi :

F est un sous-espace vectoriel de *E*.

Comme W est stable par $\mathcal{L}$, on a immédiatement :

$$\mathcal{L} \subset F .$$

On a $\dim W = k$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ une base de W, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_n)$ de V.

Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de V à la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $M \in F$, notons $u \in \mathcal{L}(V)$ tel que $M = M_{\mathcal{B}_c}(u)$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}MP \quad \Leftrightarrow \quad M = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} .$$

Or, W est stable par u si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-k,k} & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$, autrement dit, si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{Vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in C\right)$ avec $C = [\![1,n]\!]^2 \setminus [\![n-k+1,n]\!] \times [\![1,k]\!]$, qui est de cardinal $n^2 - k(n-k)$. Comme la famille $\left(E_{i,j}, (i,j) \in C\right)$ est libre (car extraite de la base canonique de E), on a $\dim \mathrm{Vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in C\right) = n^2 - k(n-k)$.

Enfin, comme l'application $A \mapsto PAP^{-1}$ est un automorphisme de E, F est isomorphe à $\mathrm{Vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in C\right)$ et ainsi :

$$\dim F = n^2 - k(n-k) .$$

Finalement :

$$\boxed{\left\{M \in E, M(W) \subset W\right\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{, contenant } \mathcal{L} \text{ et de dimension } n^2 - k(n-k).}$$

On donc $\mathcal{L} \subset F \subset E$ et ces trois ensembles sont des sous-espaces de E, donc :

$$\dim \mathcal{L} \le \dim F \le \dim E \quad \Rightarrow \quad n^2 - 1 \le \dim \mathcal{L} \le n^2 - k(n-k) \le n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 - k(n-k) = n^2 - 1 \text{ ou } n^2 .$$

Le dernier résultat revient à $k(n-k) = 1$ ou 0.

Or, k et $n-k$ sont des entiers naturels, donc $k(n-k) = 1$ implique $k = n-k = 1$ et donc $n = 2$. Ceci contredit l'hypothèse $n \ge 3$, donc $k(n-k) = 0$, soit :

$$k = 0 \text{ ou } k = n .$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{W = \{0_V\} \text{ ou } W = V}$$

III.B.1) La famille $(I, E_{k,m})$ est libre, donc :

$$\dim \mathcal{H} = \dim\left(\mathrm{Vect}\,(I, E_{k,m})\right) = 2 .$$

Par ailleurs, on a $\mathcal{H} + \mathcal{L} \subset E$, donc, avec la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(\mathcal{H} + \mathcal{L}) = \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{L} - \dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \le \dim E = n^2 .$$

Avec $\dim \mathcal{H} = 2$ et $\dim \mathcal{L} \ge n^2 - 1$, ceci donne :

$$\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \ge \dim \mathcal{H} + \dim \mathcal{L} - n^2 \ge 2 + n^2 - 1 - n^2 .$$

Soit :

$$\boxed{\dim(\mathcal{H} \cap \mathcal{L}) \ge 1}$$

D'après ce qui précède, il existe une matrice non nulle $A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{L}$, autrement dit, il existe deux nombres complexes a et b tels que $A = aI + bE_{k,m} \in \mathcal{L}$.

Si $a = 0$, alors $A = bE_{k,m} \in \mathcal{L}$ avec $b \neq 0$ car $A \neq 0_n$, donc $E_{k,m} = \dfrac{1}{b} A \in \mathcal{L}$, car $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E. Ceci est absurde, car par hypothèse, $E_{k,m} \notin \mathcal{L}$.

Ainsi, $a \neq 0$ et A est une matrice triangulaire, dont tous les coefficients diagonaux valent a, non nul (le seul autre éventuel coefficient non nul est b qui n'est pas sur la diagonale car $k \neq m$). Alors, A est inversible.

Finalement, comme $A \in \mathcal{L}$:

$\boxed{\mathcal{L} \text{ contient une matrice inversible.}}$

III.B.2) (a) Toutes les colonnes de J sont égales au vecteur $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, donc $\operatorname{Im} J = \operatorname{Vect}(e)$ et ainsi :

$$rg\,(J) = 1.$$

D'après le théorème du rang, on a $\dim \ker J = n - rg\,(J) = n - 1$.

De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $Je_k = Je_n = e$, donc $J(e_k - e_n) = 0_V$ et $e_k - e_n \in \ker J$.

Or, pour $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, on a :

$$a_1(e_1 - e_n) + a_2(e_2 - e_n) + \ldots + a_{n-1}(e_{n-1} - e_n) = 0_V \quad \Leftrightarrow \quad a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_{n-1}e_{n-1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})e_n = 0_V.$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de V, donc libre, on obtient :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0.$$

Ainsi, la famille $(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\ker J$, qui est de dimension $n-1$, donc :

$$\ker J = \operatorname{Vect}\left(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n\right).$$

Remarquons que $Tr\,(J) = n$ et la trace de J est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

Comme 0 est valeur propre avec $\dim \ker J = n-1$, n est valeur propre de J et $\dim \ker(J - nI) = 1$.
Or, on a $Je = J(e_1 + e_2 + \ldots + e_n) = Je_1 + Je_2 + \ldots + Je_n = ne$, donc :

$$\ker(J - nI) = \operatorname{Vect}(e).$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les valeurs propres de } J \text{ sont } 0 \text{ et } n\text{, de sous-espaces propres associés}\\ \text{respectifs } \operatorname{Vect}\left(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n\right) \text{ et } \operatorname{Vect}\left(e_1 + e_2 + \ldots + e_n\right).\end{array}}$$

III.B.2) (b) Remarquons que $M = J - I$ et comme $n > 2$, $1 \notin Sp\,(J) = \{0, n\}$, donc $\det M = \det\left(J - I\right) \neq 0$ et ainsi :

$\boxed{M \text{ est inversible.}}$

Par hypothèse ici, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $j \neq i$, $E_{i,j} \in \mathcal{L}$, donc $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} E_{i,j} \in \mathcal{L}$, car $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Ainsi, nous venons de prouver que :

- si pour tout $(k,m)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k\neq m$, $E_{k,m}\in\mathcal{L}$, alors $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible ;
- s'il existe $(k,m)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $k\neq m$ et $E_{k,m}\notin\mathcal{L}$, alors, d'après la question III.B.1), $\mathcal{L}$ contient une matrice inversible.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, } \mathcal{L} \text{ contient une matrice inversible.}}$$

III.C) On a $A\in\mathcal{L}\cap GL_n(\mathbb{C})$.

La famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est une famille de n^2+1 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est de dimension n^2, donc :

$$\boxed{\text{La famille } (A, A^2, \dots, A^{n^2+1}) \text{ est liée.}}$$

Comme la famille $(A, A^2, \dots, A^{n^2+1})$ est liée, il existe des complexes $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$, non tous nuls, tels que :

$$a_1A+a_2A^2+\dots+a_{n^2+1}A^{n^2+1}=0_n.$$

Comme les a_k ne sont pas tous nuls, l'ensemble $\left\{k\in[\![1,n^2+1]\!], a_k\neq 0\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$, donc admet un minimum *m* et un maximum *M*.

On a alors $a_k=0$ pour tout $k\in[\![1,n^2+1]\!]$ tel que $k<m$ ou $k>M$ (s'il y en a), $a_m\neq 0$ et $a_M\neq 0$ (donc $a_ma_M\neq 0$), et :

$$a_mA^m+\dots+a_MA^M=0_n.$$

Remarquons que $m\leq M$ et, si $m=M$, alors $a_mA^m=0_n$ avec $a_m\neq 0$, donc $A^m=0_n$, qui est absurde car *A* est inversible, donc A^m l'est aussi. Ainsi, $m<M$ et on peut écrire :

$$a_mA^m+a_{m+1}A^{m+1}+\dots+a_MA^M=0_n \quad\Leftrightarrow\quad A^{-m}(a_mA^m+a_{m+1}A^{m+1}+\dots+a_MA^M)=0_n.$$

Soit :

$$a_mI+a_{m+1}A+\dots+a_MA^{M-m}=0_n.$$

Finalement, en notant $p=M-m>0$ et pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, $\lambda_k=a_{m+k}$:

$$\boxed{\text{Il existe } p\in\mathbb{N}^* \text{ et } (\lambda_k)_{k\in[\![0,p]\!]}\in\mathbb{C}^{p+1} \text{ tels que } \lambda_0\lambda_p\neq 0 \text{ et } \lambda_0I+\lambda_1A+\dots+\lambda_pA^p=0_n.}$$

Comme $\lambda_0\neq 0$, on peut écrire :

$$I=-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}A-\dots-\frac{\lambda_p}{\lambda_0}A^p.$$

Or, $A\in\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est stable par produit matriciel, donc pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $A^k\in\mathcal{L}$ et, comme $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de *E*, $-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}A-\dots-\frac{\lambda_p}{\lambda_0}A^p\in\mathcal{L}$ et ainsi :

$$\boxed{I\in\mathcal{L}}$$