Corrigé du DM n° 7

Exercice 1

On a $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.A -

I.A.1) Un réel λ est valeur propre de AB si et seulement si $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = 0$, ce qui équivaut à $\det(AB - \lambda I_n) = 0$. Alors, en prenant $\lambda = 0$, on a :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } AB \text{ si et seulement si } \det(AB) = 0.}$$

I.A.2) On a :

$$\det(AB) = \det A \times \det B = \det B \times \det A = \det(BA).$$

Alors, d'après la question 1) :

$$0 \in Sp(AB) \quad \Leftrightarrow \quad \det(AB) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(BA) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in Sp(BA).$$

Ainsi :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } AB \text{ si et seulement si } 0 \text{ est valeur propre de } BA.}$$

I.B -

I.B.1) Si λ est une valeur propre non nulle de AB et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, alors on a $ABX = \lambda X$ avec $X \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, donc $ABX = \lambda X \neq 0$.

Si $BX = 0$, alors $ABX = A0 = 0$ et on vient de voir que cela n'est pas vrai, donc $BX \neq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } ABX \text{ et } BX \text{ ne sont pas nuls.}}$$

I.B.2) On a $(BA)(BX) = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX$ et comme $BX \neq 0$:

$$\boxed{BX \text{ est un vecteur propre de } BA \text{ (associé à la valeur propre } \lambda).}$$

I.B.3) D'après ce qui précède, si $\lambda \in Sp(AB) \setminus \{0\}$, alors $\lambda \in Sp(BA) \setminus \{0\}$, donc :

$$Sp(AB) \setminus \{0\} \subset Sp(BA) \setminus \{0\}.$$

Comme A et B jouent le même rôle, $Sp(BA) \setminus \{0\} \subset Sp(AB) \setminus \{0\}$ et ainsi :

$$Sp(AB) \setminus \{0\} = Sp(BA) \setminus \{0\}.$$

De plus, d'après **I.A**, on a $0\in Sp(AB)$ si et seulement si $0\in Sp(BA)$, donc :

$$Sp(AB)=Sp(BA).$$

Autrement dit :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ont les mêmes valeurs propres réelles.}}$$

I.C -

I.C.1) Pour tout $x\in\mathbb{C}$, on a :

$$\det(AB-xI)=\det\left(A(B-xA^{-1})\right)=\det\left((B-xA^{-1})A\right)=\det(BA-xI).$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{\det(AB-xI)=\det(BA-xI)}$$

I.C.2) D'après ce qui précède, on a pour tout $x\in\mathbb{C}$:

$$\chi_{AB}(x)=\det(xI-AB)=(-1)^n\det(AB-xI)=(-1)^n\det(BA-xI)=\det(xI-BA)=\chi_{BA}(x).$$

Ceci implique immédiatement que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$, et donc que :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec les mêmes multiplicités.}}$$

I.D -

D'après la question précédente, pour prouver que, les matrices AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec les mêmes multiplicités, il suffit de prouver que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$, c'est-à-dire que pour tout $x\in\mathbb{C}$, $\chi_{AB}(x)=\det(xI-AB)=\det(xI-BA)=\chi_{BA}(x)$.

Posons $r=rg(A)$ et $J=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r}\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{pmatrix}$.

Pour tout $M=\begin{pmatrix} M_1 & M_2\\ M_3 & M_4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $M_1\in\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ (et M_2,M_3,M_4 de dimensions adéquates), on a :

$$JM=\begin{pmatrix} M_1 & M_2\\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{pmatrix} \text{ et } MJ=\begin{pmatrix} M_1 & 0_{r,n-r}\\ M_3 & 0_{n-r}\end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{C}$:

$$\left.\begin{aligned}\det(xI-JM)&=\det\begin{pmatrix} xI_r-M_1 & M_2\\ 0_{n-r,r} & xI_{n-r}\end{pmatrix}=\det(xI_r-M_1)\det(xI_{n-r})\\ \det(xI-MJ)&=\det\begin{pmatrix} xI_r-M_1 & 0_{r,n-r}\\ M_3 & xI_{n-r}\end{pmatrix}=\det(xI_r-M_1)\det(xI_{n-r})\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\quad \det(xI-JM)=\det(xI-MJ).$$

Or, comme $rg(A)=r$, il existe $P,Q\in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A=PJQ$ et pour tout $x\in\mathbb{C}$:

$$\chi_{AB}(x)=\det(xI-AB)=\det\left(xI-(PJQ)B\right)=\det\left(xI-P(JQB)\right).$$

Avec la question précédente (P est inversible) :

$$\chi_{AB}(x)=\det\big(xI-(JQB)P\big)=\det\big(xI-J(QBP)\big).$$

Avec le résultat ci-dessus appliqué à $M=QBP$:

$$\chi_{AB}(x)=\det\big(xI-(QBP)J\big)=\det\big(xI-Q(BPJ)\big).$$

Avec à nouveau la question précédente (Q est inversible) :

$$\chi_{AB}(x)=\det\big(xI-(BPJ)Q\big)=\det\big(xI-B(PJQ)\big)=\det\big(xI-BA\big)=\chi_{BA}(x).$$

Ainsi, on a bien $\chi_{AB}=\chi_{BA}$ et donc, quelle que soient les matrices A et B :

AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles ou complexes, avec les mêmes multiplicités.

Exercice 2

1) Soit $x\in E\setminus\ker f$. La famille $\big(f(x),g(x)\big)$ est liée, donc il existe $(\lambda_x,\mu_x)\in\mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}$ tel que :

$$\lambda_x f(x)+\mu_x g(x)=0.$$

Comme $f(x)\neq 0$, on a $\mu_x\neq 0$ (sinon $\lambda_x f(x)=0$, donc $\lambda_x=0=\mu_x$ qui est absurde).

Ainsi, $g(x)=-\dfrac{\lambda_x}{\mu_x}f(x)$ et donc, en posant $a_x=-\dfrac{\lambda_x}{\mu_x}\in\mathbb{K}$ (qui est unique car $f(x)\neq 0$, donc $a_xf(x)=a_x'f(x)$ implique $a_x=a_x'$), on a :

$$\boxed{g(x)=a_xf(x)}$$

2) Soit $x,y\in E\setminus\ker f$ tels que la famille $\big(f(x),f(y)\big)$ est libre.

D'après la question précédente, il existe $a_x,a_y\in\mathbb{K}$ tels que $g(x)=a_xf(x)$ et $g(y)=a_yf(y)$.

De plus, si $f(x+y)=0$, alors $f(x)+f(y)=0$ et la famille $\big(f(x),f(y)\big)$ est liée, ce qui n'est pas, donc $f(x+y)\neq 0$ et $x+y\in E\setminus\ker f$. Alors, il existe $a_{x+y}\in\mathbb{K}$ tels que $g(x+y)=a_{x+y}f(x+y)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
g(x+y)=a_{x+y}f(x+y) &\iff g(x)+g(y)=a_{x+y}\big[f(x)+f(y)\big]\\
&\iff a_xf(x)+a_yf(y)=a_{x+y}f(x)+a_{x+y}f(y)\\
&\iff \big(a_{x+y}-a_x\big)f(x)+\big(a_{x+y}-a_y\big)f(y)=0\\
&\iff a_{x+y}-a_x=a_{x+y}-a_y=0 \qquad \text{car } \big(f(x),f(y)\big) \text{ est libre.}\\
&\iff a_{x+y}=a_x=a_y
\end{aligned}$$

Ainsi, si la famille $\big(f(x),f(y)\big)$ est libre, alors :

$$\boxed{a_x=a_y}$$

3) Supposons que $rg(f)\geq 2$.

- Soit $x,y\in E\setminus\ker f$ tels que la famille $\big(f(x),f(y)\big)$ est liée.

  Comme $rg(f)\geq 2$, il existe $z\in E$ tel que la famille $\big(f(x),f(z)\big)$ soit libre. Ceci implique entre autres que $f(z)\neq 0$, donc que $z\in E\setminus\ker f$ et que $\big(f(y),f(z)\big)$ est elle aussi libre (car $\big(f(x),f(y)\big)$ est liée).

  Alors, d'après la question précédente, on a $a_x=a_z=a_y$, donc à nouveau $a_x=a_y$.

  Ainsi, si $rg(f)\geq 2$, alors pour tous $x,y\in E\setminus\ker f$, $a_x=a_y=a$ et ainsi :

  Il existe $a\in\mathbb{K}$ tel que pour tout $x\in E\setminus\ker f$, $g(x)=a\,f(x)$.

- Alors, pour tout $z\in\ker f$ et tout $x\in E\setminus\ker f$, on a $f(z)=0$ et $f(x)\neq 0$ (et $g(x)=a\,f(x)$), donc :

  $$f(x+z)=f(x)+f(z)=f(x)\neq 0.$$

  Ainsi, $x+z\in E\setminus\ker f$ et $g(x+z)=a\,f(x+z)$. Alors :

  $$\begin{aligned} g(x+z)=a\,f(x+z) &\iff g(x)+g(z)=a\,f(x)+a\,f(z) \\ &\iff a\,f(x)+g(z)=a\,f(x) \\ &\iff g(z)=0 \end{aligned}$$

  Donc, $g(z)=a\,f(z)=0$.

  Ainsi :

  $$\left.\begin{array}{l}\forall\, z\in\ker f,\ g(z)=a\,f(z)\\ \forall\, x\in E\setminus\ker f,\ g(x)=a\,f(x)\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \forall\, x\in E,\ g(x)=a\,f(x)\ \Rightarrow\ g=a\,f.$$

  Ceci est absurde car (f,g) est libre.

Finalement, l'hypothèse $rg(f)\geq 2$ mène à une contradiction, donc $rg(f)<2$, et comme f n'est pas nulle (sinon (f,g) est liée), on a :

$$\boxed{rg(f)=1}$$

Comme *f* et *g* jouent le même rôle :

$$\boxed{rg(g)=1}$$

On a donc $rg(f)=1$, donc $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(u)$ avec $u\in E\setminus\{0\}$ et, d'après le théorème du rang, on a aussi $\dim\ker f=n-rg(f)=n-1$, donc $\ker f=\operatorname{Vect}(e_2,\dots,e_n)$, où $(e_2,\dots,e_n)$ est une base de $\ker f$.

Comme $u\in\operatorname{Im} f$ et $u\neq 0$, il existe $e_1\in E\setminus\{0\}$, tel que $u=f(e_1)$.

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n=0$. On a alors :

$$f(\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n)=\lambda_1f(e_1)+\lambda_2f(e_2)+\dots+\lambda_nf(e_n)=\lambda_1u=f(0)=0.$$

Et comme $u\neq 0$, ceci donne $\lambda_1=0$, puis $\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n=0$ et comme $(e_2,\dots,e_n)$ est une base de $\ker f$, cette famille est libre donc $\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$. Ainsi, $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$, donc la famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est libre. Comme elle contient *n* vecteurs de *E*, qui est de dimension *n*, c'est une base de *E*.

On peut alors écrire $u=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$ avec $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$.

Avec $f(e_1)=u=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n$ et $f(e_k)=0$ pour tout $k\in[\![2,n]\!]$, la matrice de *f* dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_2 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Donc, $Tr(f)=\alpha_1$ et comme par hypothèse, $Tr(f)\neq 0$, on a $\alpha_1\neq 0$. Alors :

$$\mathrm{Vect}\left(u,e_2,...,e_n\right)=\mathrm{Vect}\left(\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+...+\alpha_n e_n,e_2,...,e_n\right)=\mathrm{Vect}\left(\alpha_1 e_1,e_2,...,e_n\right)=\mathrm{Vect}\left(e_1,e_2,...,e_n\right)=E.$$

Ainsi, la famille $\mathcal{B}'=(u,e_2,...,e_n)$ est génératrice de *E*, et, comme elle contient *n* vecteurs de *E* (de dimension *n*) c'est une base de *E*.

Enfin, on a $f(u)\in \mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}(u)$, donc il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $f(u)=\lambda u$.

La matrice de *f* dans la base $\mathcal{B}'$ est alors :

$$M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'alors $Tr(f)=\lambda\neq 0$.

Comme $M_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Et, comme *f* et *g* jouent le même rôle :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$