Corrigé du DS n° 5

I - Étude d'une suite récurrente

On a :

- $f \in C^2([0,1],[0,1])$,
- $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$,
- $f(1)=1$, $f'(0)<1$, $f''(1)>0$, $f'(1)=m$,
- $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

I.A.1) Comme *f* est à images dans $[0,1]$, on a $u_1 = f(u_0) = f(0) \geq 0 = u_0$.

Comme $f' \geq 0$, f est croissante sur $[0,1]$, donc si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$.

Ainsi, $u_0 \leq u_1$ et $u_n \leq u_{n+1}$ implique $u_{n+1} \leq u_{n+2}$: ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ et donc que :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

De plus, $u_0 = 0 \in [0,1]$ et comme *f* est à images dans $[0,1]$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$. Ainsi, tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, donc la suite est bornée et comme elle est croissante :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in [0,1]$.

I.A.2) Posons $g(x) = f(x) - x$ et $F = \{x \in [0,1], f(x) = x\} = \{x \in [0,1], g(x) = 0\}$.

On a $g(1) = f(1) - 1 = 0$, donc $1 \in F$.

L'ensemble *F* est alors une partie non vide de $\mathbb{R}$, incluse dans $[0,1]$, donc minorée par 0 : il admet une borne inférieure $\alpha \in [0,1]$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *F* qui converge vers α, et par continuité de *g*, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\alpha)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$, donc $g(x_n) = 0$ et ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = 0 = g(\alpha)$, donc $\alpha \in F$. Ainsi, α est le plus petit élément de *F*, qui est l'ensemble des solutions $f(x) = x$, donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet une plus petite solution.}}$$

On note $x_f = \min F$.

I.A.3) La fonction *f* est continue sur $[0,1]$, donc en $\ell \in [0,1]$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $\ell = f(\ell)$, donc $\ell \in F$ et $\underline{x_f \leq \ell}$.

On a $u_0 = 0 \in [0, x_f]$ et si, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on a $u_n \in [0, x_f]$, alors par croissance de *f* :

$$0 \leq u_n \leq x_f \quad \Rightarrow \quad f(0) \leq f(u_n) \leq f(x_f) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq f(0) \leq u_{n+1} \leq x_f \quad \text{(car } f(x_f) = x_f\text{)}.$$

Ainsi, $u_{n+1} \in [0, x_f]$. Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, x_f]$ et en passant à la limite, on obtient $\ell \in [0, x_f]$, soit $\underline{\ell \leq x_f}$.

Ainsi, $x_f \leq \ell$ et $x_f \geq \ell$, donc :

$$\boxed{\ell = x_f}$$

I.B) Comme $F \subset [0,1]$ et $x_f = \min F$, montrer que $x_f \in [0,1[$ revient à montrer que f admet un point fixe strictement inférieur à 1.

La fonction f est de classe C^2 sur $[0,1]$, donc g aussi en tant que différence de telles fonctions, et $g'' = f'' \geq 0$ donc g' est croissante sur $[0,1]$ de $g'(0) = f'(0) - 1 < 0$ à $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 > 0$.

Ainsi, g' (qui est continue) s'annule au moins une fois en $\beta \in]0,1[$ et :

- sur $[0, \beta]$, $g' \leq 0$ donc g est décroissante de $g(0) = f(0) \geq 0$ à $g(\beta)$;
- sur $[\beta, 1]$, $g' \geq 0$ donc g est croissante de $g(\beta)$ à $g(1) = f(1) - 1 = 0$.

Ce dernier point prouve que $g(\beta) \leq 0$ et, comme $g(0) \geq 0$ et g est continue sur $[0, \beta]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\gamma \in [0, \beta] \subset [0,1[$ tel que $g(\gamma) = 0$, soit $f(\gamma) = \gamma$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{x_f \in [0,1[}$$

I.C) Ici $m \leq 1$, donc $g'(1) = f'(1) - 1 = m - 1 \leq 0$ et on a toujours g' croissante sur $[0,1]$.

De plus, $g''(1) = f''(1) > 0$ et g'' est continue sur $[0,1]$, donc il existe $\varepsilon \in]0,1[$ tel que $g'' > 0$ sur $[\varepsilon, 1]$, donc g' est strictement croissante sur $[\varepsilon, 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in [\varepsilon, 1[$, $g'(x) < g'(1) \leq 0$ et pour tout $x \in [0, \varepsilon]$, $g'(x) \leq g'(\varepsilon) < 0$. Ainsi, $g' < 0$ sur $[0,1[$, donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Alors, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) < g(1) = 0$ donc $g(x) \neq 0$ et ainsi, $F = \{1\}$, d'où :

$$\boxed{x_f = 1}$$

On vient de voir que pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) < 0$, soit $f(x) < x$.

Prouvons alors par récurrence sur pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

- On a $u_0 = 0 \neq 1$.
- Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 1$, alors $u_n < 1$ donc $u_{n+1} = f(u_n) < f(1) = 1$ et ainsi, $u_{n+1} \neq 1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n \neq 1}$$

I.D.1) Ici $m=1$.

Comme *f* est C^2 sur $[0,1]$, la formule de Taylor-Young en 1 permet d'écrire :

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right)=1+m(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

Comme $m=1$, on a $\ell=x_f=1$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et, on peut écrire :

$$u_{n+1}=f(u_n)=1+m(u_n-1)+\frac{f''(1)}{2}(u_n-1)^2+\underset{n\to+\infty}{o}\left((u_n-1)^2\right).$$

Soit, avec $\varepsilon_n=1-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{n+1}=m\varepsilon_n-\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2).$$

Donc, avec $m=1$ et $\varepsilon_n\neq 0$ (d'après la question précédente) :

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}}-\frac{1}{\varepsilon_n}=\frac{\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}=\frac{\frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)}{\varepsilon_n\left(\varepsilon_n+\underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n)\right)}=\frac{\frac{f''(1)}{2}+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}{1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}}-\frac{1}{\varepsilon_n}\right)=\frac{f''(1)}{2}}$$

I.D.2) Grace au lemme de Césaro, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}}-\frac{1}{\varepsilon_k}\right)=\frac{f''(1)}{2}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}}-\frac{1}{\varepsilon_k}\right)=\frac{1}{\varepsilon_n}-\frac{1}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_n}-1$ par télescopage (avec $\varepsilon_0=1-u_0=1$), donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_n}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\varepsilon_n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{f''(1)}{2}.$$

Et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\varepsilon_n}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n}$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(1-u_n)}=\frac{f''(1)}{2}.$$

On a $f''(1)>0$, donc $f''(1)\neq 0$ et on peut écrire, $n(1-u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{f''(1)}$, soit :

$$\boxed{1-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{f''(1)\,n}}$$

I.E.1) Ici $m<1$, on a toujours $\ell = x_f = 1$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\varepsilon_{n+1} = m\varepsilon_n - \dfrac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)$.

Donc :

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = m.$$

Comme $\varepsilon_n > 0$ et $m<1$, la règle de d'Alembert permet de conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum \varepsilon_n \text{ converge.}}$$

Comme f' est croissante est positive sur $[0,1]$, si $f'(1) = m = 0$, alors f' est nulle et f'' aussi, ce qui est absurde car $f''(1) > 0$, donc $m>0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n} > 0$.

On peut alors poser $v_n = \ln\left(\dfrac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, :

$$v_n = \ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{1}{m\varepsilon_n}\left(m\varepsilon_n - \frac{f''(1)}{2}\varepsilon_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n^2)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n + \underset{n\to+\infty}{o}(\varepsilon_n)\right).$$

Donc, comme $\dfrac{f''(1)}{2m} > 0$, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{f''(1)}{2m}\varepsilon_n$ et, comme $\sum \varepsilon_n$ converge, $\sum v_n$ converge, soit :

$$\boxed{\text{La série } \sum \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right) \text{ converge.}}$$

I.E.2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n = \ln\left(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}\right) - \ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)$, donc la convergence de la série $\sum v_n$ implique la convergence de la suite $\left(\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons a la limite de cette suite.

Par continuité de la fonction exponentielle en a, on alors :

$$\lim_{n\to+\infty} m^{-n}\varepsilon_n = e^a.$$

Ainsi, en posant $c = e^a > 0$, on a :

$$\boxed{\varepsilon_n = 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c\, m^n}$$

II - Formule de Wald

II.A.1) Voir le cours.

II.A.2) On admet que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1}. Or, pour tout pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} X_i = \sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

Donc, d'après la question précédente, on a $G_{S_{k+1}} = G_{S_k + X_{k+1}} = G_{S_k} G_{X_{k+1}}$, comme G_X est la fonction génératrice commune à toutes les variables X_k, on a pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$G_{S_{k+1}} = G_{S_k} G_X$$

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = \left(G_X\right)^k$.

Pour $k=0$, on a $S_0 = 0$, donc $G_{S_0} : t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S_0 = n)t^n = P(S_0 = 0) = 1$. Ainsi, $G_{S_0} = 1 = \left(G_X\right)^0$ et la propriété est vraie au rang $k=0$.

Supposons la propriété vraie à un rang $k \in \mathbb{N}$, soit $G_{S_k} = \left(G_X\right)^k$. On a alors :

$$G_{S_{k+1}} = G_{S_k} G_X = \left(G_X\right)^k G_X = \left(G_X\right)^{k+1}.$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ G_{S_k} = \left(G_X\right)^k.}$$

II.A.3) On a $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$ et S est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $t \in [0,1[$, $G_S(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S=n)t^n$.

La famille d'évènements $\left((T=k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, donc la loi des probabilités totales donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left((T=k)\cap(S=n)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left((T=k)\cap(S_k=n)\right).$$

Comme S_k et T sont indépendantes pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$P(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n).$$

Alors, pour tout $K \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S=n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{K} P(T=k)P(S_k=n)t^n + \sum_{k=K+1}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right]. \end{aligned}$$

Comme toutes les séries sont à termes positifs (avec $t \in [0,1[$), la convergence de la série ci-dessus entraine celles des séries $\sum P(T=k)P(S_k=n)t^n$ et $\sum\left(\sum_{k=K}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right)$, donc :

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{K}\left[P(T=k)\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_k=n)t^n\right] + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right]$$

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_k=n)t^n = G_{S_k}(t) = \left(G_X(t)\right)^k$, donc, pour tout $t \in [0,1[$ et tout $K \in \mathbb{N}$:

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty} P(T=k)P(S_k=n)t^n\right].$$

II.A.4) Pour $t\in[0,1[$ et tout $K\in\mathbb{N}$, on pose :

$$R_K=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\right].$$

On a pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0\le P(S_k=n)\le 1$, donc $0\le P(T=k)P(S_k=n)t^n\le P(T=k)t^n$ et :

$$0\le\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)P(S_k=n)t^n\le\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)t^n=t^n\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k).$$

Remarquons que la série $\sum P(T=k)$ converge (de somme 1), donc $\sum\limits_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)$ est bien défini.

De plus, comme $t\in[0,1[$, la série géométrique $\sum t^n$ converge, et on peut écrire :

$$0\le R_K\le\left(\sum_{n=0}^{+\infty}t^n\right)\left(\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)\right).$$

Soit :

$$\boxed{0\le R_K\le\frac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)}$$

II.A.5) Soit $t\in[0,1[$ fixé. Comme la série $\sum P(T=k)$ converge, la suite de ses restes est de limite nulle, donc on a $\lim\limits_{K\to+\infty}\left[\frac{1}{1-t}\sum\limits_{k=K+1}^{+\infty}P(T=k)\right]=0$ et avec le théorème des gendarmes, l'encadrement de la question précédente permet de conclure que :

$$\lim_{K\to+\infty}R_K=0.$$

Or, on a vu que pour tout $t\in[0,1[$ et tout $K\in\mathbb{N}$:

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{K}P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k+R_K.$$

En passant à la limite quand $K\to+\infty$, on obtient:

$$G_S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(T=k)\left(G_X(t)\right)^k.$$

Enfin, on a $G_T(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(T=k)x^k$, donc pour tout $t\in[0,1[$, $G_S(t)=G_T\left(G_X(t)\right)=G_T\circ G_X(t)$ et ainsi :

$$G_S=G_T\circ G_X.$$

II.B - On suppose que T et X_1 admettent une espérance finie, donc G_T et $G_{X_1}=G_X$ sont dérivables en 1 et :

$$E(T)=G_T'(1)\text{ et }E(X_1)=G_{X_1}'(1)=G_X'(1).$$

Comme $G_X(1)=1$, $G_S=G_T\circ G_X$ est dérivable en 1, donc S admet une espérance finie et :

$$E(S)=G_S'(1)=G_X'(1).G_T'\left(G_X(1)\right)=G_X'(1).G_T'(1)=E(T)E(X_1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } S \text{ admet une espérance finie et } E(S)=E(T)E(X_1).}$$

II.C.1) La fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ est :

$$\boxed{t \mapsto e^{\lambda(t-1)}}$$

II.C.2) Notons T la variable aléatoire donnant le nombre d'œufs pondus, suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, donc de fonction génératrice $G_T : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, appelons X_k la variable aléatoire valant 1 si l'œuf n° k devient un nouvel insecte et 0 sinon. Les variables X_k suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre α, de fonction génératrice $G_X : t \mapsto \alpha t + 1 - \alpha$.

La variable $S = \sum_{k=1}^{T} X_k$ comme définie dans les questions précédentes représente alors le nombre d'insectes issus de la ponte.

L'éclosion d'un œuf est indépendante de celle des autres et du nombre d'autres œufs, donc les variables X_k sont mutuellement indépendantes et T est indépendante des précédentes.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les variables T et X_{k+1} sont indépendantes de $X_1, \ldots, X_k$, qui sont elles-mêmes mutuellement indépendantes, donc T et X_{k+1} sont indépendantes de $S_k = X_1 + \ldots + X_k$.

En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P\left(S_k = i, X_{k+1} = j\right) &= \sum_{i_1 + \ldots + i_k = i} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k, X_{k+1} = j\right) \\
&= \sum_{i_1 + \ldots + i_k = i} P\left(X_1 = i_1\right) \ldots P\left(X_k = i_k\right) P\left(X_{k+1} = j\right) \\
&= \sum_{i_1 + \ldots + i_k = i} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k\right) P\left(X_{k+1} = j\right) \\
&= \left(\sum_{i_1 + \ldots + i_k = i} P\left(X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k\right) \right) P\left(X_{k+1} = j\right) \\
&= P\left(S_k = i\right) P\left(X_{k+1} = j\right)
\end{aligned}$$

On prouve de même l'indépendance de S_k et T.

On peut donc utiliser le résultat de la question II.A, soit pour tout $t \in [0,1[$:

$$G_S(t) = G_T \circ G_X(t) = G_T\left(G_X(t)\right) = G_T\left(G_X(t)\right) = e^{\lambda(\alpha t + 1 - \alpha - 1)} = e^{\lambda\alpha(t-1)}.$$

Cette fonction est la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda\alpha$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le nombre d'insectes issus de la ponte suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda\alpha.}$$

III - Processus de Galton-Watson

III.A.1) Le nombre de fils enfantés par un individu d'une génération est indépendant des nombre de fils enfantés par les autres individus de la génération (à n fixé, les $X_{n,i}$ sont indépendantes) et du nombre total de d'individus de la génération (Y_n est indépendant des $X_{n,i}$).

On peut donc utiliser les résultats de la partie précédente en identifiant, à n fixé, les $X_{n,i}$ aux X_k (suivant toutes la loi μ), les $\sum_{i=1}^{N} X_{n,i}$ aux S_N, Y_n à T, et Y_{n+1} à S (comme $Y_{n+1}(\omega) = 0$ quand $Y_n(\omega) = 0$, on a $S_0(\omega) = 0$).

Alors, d'après la question ***II.A***, on a $G_S = G_T \circ G_X$, soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,i}} .$$

Avec $G_{X_{n,i}} = f$, $G_{Y_n} = \varphi_n$ et $G_{Y_{n+1}} = \varphi_{n+1}$, on obtient bien pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f}$$

Remarquons que dans la partie ***II***, on a admis l'indépendance, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de S_k et X_{k+1}, et celle de T et S_k. On les a justifiées dans la question **II.C.2**.

III.A.2) Toujours grâce à la partie ***II*** (question ***II.B***), on a $E(S) = E(T)E(X_1)$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E(Y_{n+1}) = E(Y_n)E(X_{n,1}) .$$

Comme $E(X_{n,1}) = m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(E(Y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison *m*. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E(Y_n) = E(Y_0)\, m^n .$$

Et comme Y_0 est la variable certaine égale à 1, on a $E(Y_0) = 1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{E(Y_n) = m^n}$$

III.A.3) *a*) Il y a extinction lorsqu'il existe un entier *n* tel que $Y_n = 0$, autrement dit, lorsque $Y_0 = 0$ *ou* $Y_1 = 0$ *ou* $Y_2 = 0$ *ou* … Ainsi, la probabilité d'extinction est : $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Y_n = 0)\right)$.

Remarquons par ailleurs, que pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n(\omega) = 0$ entraine $Y_{n+1}(\omega) = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Y_n = 0) \subset (Y_{n+1} = 0)$. On peut donc utiliser la continuité croissante :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Y_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n = 0) .$$

Or, pour tout $t \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y_n = k)\, t^k$, donc $\varphi_n(0) = P(Y_n = 0)$ et ainsi :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Y_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) .$$

Ceci prouve que :

La probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$ et $\varphi_0 = id$, donc :

$$\varphi_1 = \varphi_0 \circ f = f,\ \varphi_2 = \varphi_1 \circ f = f \circ f,\ \varphi_3 = \varphi_2 \circ f = f \circ f \circ f,\ \dots$$

Si $\varphi_n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où *f* apparait *n* fois, on a $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f = (f \circ f \circ \ldots \circ f) \circ f = f \circ f \circ \ldots \circ f \circ f$ où *f* apparait $n+1$ fois. Ceci prouve par récurrence que $\varphi_0 = id$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où *f* apparait *n* fois.

Alors, $\varphi_1 = f = f \circ id = f \circ \varphi_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f = (f \circ f \circ \ldots \circ f) \circ f = f \circ (f \circ \ldots \circ f \circ f) = f \circ \varphi_n .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = f \circ \varphi_n$ et donc :

$$\varphi_{n+1}(0) = f\left(\varphi_n(0)\right).$$

On a de plus $\varphi_0(0) = 0$ car $\varphi_0 = id$.

Reste à vérifier que *f* vérifie bien toutes les hypothèses de la partie ***I***.

Comme toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance et une variance, la série génératrice de μ est de classe C^2 sur $[0,1]$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$ donc :

- $f(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$;
- $f'(0) = p_1 \leq p_0 + p_1 < 1$;
- $f''(1) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p_k > 0$ car $p_0 + p_1 < 1$ donc il existe au moins un entier $k \geq 2$ tel que $p_k > 0$;
- $f'(1) = E(X) = m$.

Ainsi, toutes les hypothèses de la partie ***I*** sont vérifiées, donc :

$$\boxed{\text{On peut appliquer les résultats de la partie } \boldsymbol{I} \text{ à la suite } \left(\varphi_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}.}$$

III.A.3) Si $f'(1) = m \leq 1$, alors d'après la partie ***I*** (question ***I.C***), la suite $\left(\varphi_n(0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et donc :

$$\boxed{\text{La probabilité d'extinction est égale à 1.}}$$

III.B.1) On a $T(\Omega) = \{-1\} \cup \mathbb{N}^*$ et comme $m < 1$, la probabilité d'extinction est égale à 1 d'après la question précédente, donc $P(T = -1) = 0$. Alors, si elle existe, on a $E(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} nP(T = n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T = n) = (Y_{n-1} \neq 0) \cap (Y_n = 0)$, donc :

$$P(T = n) = P\left((Y_{n-1} \neq 0) \cap (Y_n = 0)\right) \leq P(Y_{n-1} \neq 0) = 1 - P(Y_{n-1} = 0) = 1 - \varphi_{n-1}(0).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq nP(T = n) \leq n\left(1 - \varphi_{n-1}(0)\right).$$

Or, on peut utiliser les résultats de la partie ***I***. Comme $m < 1$, la question **I.E.2** nous permet d'affirmer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que :

$$1 - \varphi_{n-1}(0) \underset{n\to+\infty}{\sim} c\, m^{n-1}.$$

Enfin, comme $n\, m^{n-1} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum c\, n\, m^{n-1}$ converge et, par comparaison, $\sum nP(T = n)$ converge aussi, ce qui prouve que :

$$\boxed{T \text{ admet une espérance.}}$$

III.B.2) *a*) On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $E(Y_n)=m^n$. Or :

$$P(Y_n\geq 1)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(Y_n=k)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}k\,P(Y_n=k)\leq\sum_{k=0}^{+\infty}k\,P(Y_n=k)=E(Y_n).$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{P(Y_n\geq 1)\leq m^n}$$

b) Pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}P(T>n)&=\sum_{n=0}^{N}\left[1-P(T\leq n)\right]\\&=N+1-\sum_{n=0}^{N}P(T\leq n)\\&=N+1-\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}P(T=k)\\&=N+1-\sum_{0\leq k\leq n\leq N}P(T=k)\\&=N+1-\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N}P(T=k)\\&=N+1-\sum_{k=0}^{N}(N-k+1)P(T=k)\\&=N+1-(N+1)\sum_{k=0}^{N}P(T=k)+\sum_{k=0}^{N}k\,P(T=k)\end{aligned}$$

Or :

$$N+1-(N+1)\sum_{k=0}^{N}P(T=k)=(N+1)\left(1-\sum_{k=0}^{N}P(T=k)\right)=(N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty}P(T=k)=\sum_{k=N+1}^{+\infty}(N+1)P(T=k).$$

Alors :

$$0\leq N+1-(N+1)\sum_{k=0}^{N}P(T=k)\leq\sum_{k=N+1}^{+\infty}k\,P(T=k).$$

Comme T admet une espérance, la série $\sum nP(T=n)$ converge, donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=N+1}^{+\infty}k\,P(T=k)\right)=0$ et, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{N\to+\infty}\left(N+1-(N+1)\sum_{k=0}^{N}P(T=k)\right)=0.$$

Finalement, avec $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{N}k\,P(T=k)\right)=E(T)$, on obtient bien :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}P(T>n)=E(T)}$$

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $\omega\in(T>n)$, alors $\omega\in(Y_n\neq 0)=(Y_n\geq 1)$, donc $(T>n)\subset(Y_n\geq 1)$ et ainsi, avec $m<1$:

$$E(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(T>n)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}(Y_n\geq 1)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}m^n=\frac{1}{1-m}.$$

Donc :

$$\boxed{E(T) \leq \frac{1}{1-m}}$$

III.C.1) D'après l'énoncé, Z est une variable aléatoire définie sur $\Omega' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Y_n = 0) \subset \Omega$.

Comme $m \leq 1$, on a $P(\Omega') = 1$ d'après **III.A.4**, donc :

$$\boxed{\text{La variable } Z \text{ est définie sur un ensemble de probabilité 1.}}$$

III.C.2) *a*) Comme les Y_n sont positives, on a $Z_n \leq Z_{n+1} \leq Z$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc :

$$(Z \leq k) \subset (Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k) \quad \Rightarrow \quad P(Z \leq k) \leq P(Z_{n+1} \leq k) \leq P(Z_n \leq k).$$

Ainsi, la suite $\left(P(Z_n \leq k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $P(Z \leq k)$, donc elle converge.

De plus, $(Z \leq k) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (Z_n \leq k)$. En effet :

- on vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z \leq k) \subset (Z_n \leq k)$, donc : $(Z \leq k) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (Z_n \leq k)$;
- pour tout $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (Z_n \leq k)$, on a $Z_n(\omega) = 1 + \sum_{i=0}^{n} Y_i(\omega) \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $1 + \sum_{i=0}^{+\infty} Y_i(\omega) = Z(\omega) \leq k$, donc $\omega \in (Z \leq k)$, soit : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (Z_n \leq k) \subset (Z \leq k)$.

Alors, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$, on peut utiliser la continuité décroissante :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leq k) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (Z_n \leq k)\right) = P(Z \leq k).$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } \left(P(Z_n \leq k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } P(Z \leq k).}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(Z_n \leq k) = (Z_n \leq k-1) \bigcup (Z_n = k).$$

Et l'union est disjointe, donc :

$$P(Z_n \leq k) = P(Z_n \leq k-1) + P(Z_n = k) \quad \Leftrightarrow \quad P(Z_n = k) = P(Z_n \leq k) - P(Z_n \leq k-1)$$

Comme $\left(P(Z_n \leq k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $P(Z \leq k)$, la suite $\left(P(Z_n = k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi et :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = k) = P(Z \leq k-1) - P(Z \leq k) = P(Z = k).$$

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z \geq Z_n \geq 1$, on a $P(Z_n = 0) = P(Z = 0) = 0$ et à nouveau :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = P(Z = 0).$$

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{La suite } \left(P(Z_n = k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } P(Z = k).}$$

c) Soient $s\in[0,1[$, $K\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\left|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_n=k)\,s^k-\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=k)\,s^k\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\left[P(Z_n=k)-P(Z=k)\right]s^k\right|.$$

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\left.\begin{array}{l}-1\le P(Z_n=k)\le 1\\ -1\le P(Z=k)\le 1\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ -1\le P(Z_n=k)-P(Z=k)\le 1\ \Rightarrow\ \left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|\le 1.$$

Donc, $\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k\le s^k$ et comme $s\in[0,1[$, $\sum s^k$ converge donc $\sum\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k$ converge aussi et on peut écrire :

$$\left|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)\right|\le\sum_{k=0}^{+\infty}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k=\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k+\sum_{k=K+1}^{+\infty}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k.$$

Avec $\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k\le s^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=K+1}^{+\infty}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k\le\sum_{k=K+1}^{+\infty}s^k=\frac{s^{K+1}}{1-s}\le\frac{s^K}{1-s}$$

Et avec $s^k\le 1$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|s^k\le\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|.$$

Finalement, on obtient bien pour tous $s\in[0,1[$, $K\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)\right|\le\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|+\frac{s^K}{1-s}}$$

d) ***<u>Plan A</u>***

Soient $s\in[0,1[$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim\limits_{K\to+\infty}\dfrac{s^K}{1-s}=0$, donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{s^K}{1-s}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour cet entier K fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}P(Z_n=k)=P(Z=k)$ pour tout $k\in[\![0,K]\!]$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|=0.$$

Alors, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\ge N$:

$$\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\ge N$:

$$\left|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)\right|\le\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|+\frac{s^K}{1-s}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)\right|=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}G_{Z_n}(s)=G_Z(s)$ et ceci pour tout $s\in[0,1[$.

Plan B

Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$, on a $0\le P(Z_{n+1}\le k)\le P(Z_n\le k)\le 1$, donc pour tout $s\in[0,1[$:

$$0\le P(Z_n\le k)s^k\le s^k.$$

Comme $\sum s^k$ converge, $\sum P(Z_{n+1}\le k)s^k$ et $\sum P(Z_n\le k)s^k$ convergent aussi et, si $S_n=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_n\le k)s^k$:

$$0\le S_{n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_{n+1}\le k)s^k\le S_n=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_n\le k)s^k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante minorée donc convergente.

Or, avec $P(Z_n=k)=P(Z_n\le k)-P(Z_n\le k-1)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}G_{Z_n}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_n=k)s^k&=P(Z_n=0)+\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_n\le k)s^k-\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_n\le k-1)s^k\\&=P(Z_n\le 0)+\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_n\le k)s^k-\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_n\le k)s^{k+1}=(1-s)S_n\end{aligned}$$

Comme $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, $\left(G_{Z_n}(s)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi et si on note $g(s)$ sa limite, on peut faire tendre n vers l'infini dans l'inégalité de la question précédente.

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{K}\left|P(Z_n=k)-P(Z=k)\right|=0$ pour tout $K\in\mathbb{N}$, on obtient pour tous $s\in[0,1[$ et $K\in\mathbb{N}$:

$$\left|g(s)-G_Z(s)\right|\le\frac{s^K}{1-s}$$

Puis, en faisant tendre K vers l'infini, on obtient $\left|g(s)-G_Z(s)\right|\le 0$, soit $g(s)=\lim\limits_{n\to+\infty}G_{Z_n}(s)=G_Z(s)$.

Conclusion commune

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $G_{Z_n}(1)=G_Z(1)=1$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}G_{Z_n}(1)=G_Z(1)$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}G_{Z_n}(s)=G_Z(s)$ pour tout $s\in[0,1]$, donc :

$$\boxed{\text{La suite de fonctions }\left(G_{Z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ converge simplement vers }G_Z\text{ sur }[0,1].}$$

III.C.3) *a)* On a $Z_1=1+Y_1=1+X_{0,1}$, donc $Z_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$ (car $X_{0,1}(\Omega)=\mathbb{N}$) et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P(Z_1=k+1)=P(X_{0,1}=k).$$

Alors, pour tout $s\in[0,1]$:

$$G_{Z_1}(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(Z_1=k)s^k=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z_1=k+1)s^{k+1}=s\sum_{k=0}^{+\infty}P(X_{0,1}=k)s^k=s\,G_{X_{0,1}}(s).$$

Soit, pour tout $s\in[0,1]$:

$$\boxed{G_{Z_1}(s)=s\,f(s)}$$

b) On a vu que la fonction *f* est continue sur $[0,1]$. De plus, pour tout $s\in[0,1]$:

$$0\le G_Z(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=k)s^k\le\sum_{k=0}^{+\infty}P(Z=k)=1.$$

Donc, pour tout $s\in[0,1]$, on a $G_Z(s)\in[0,1]$ et, ainsi, *f* est continue en $G_Z(s)$.

Enfin, d'après la question **III.C.2**.*d*, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}G_{Z_n}(s)=G_Z(s)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(G_{Z_{n-1}}(s)\right)=f\left(G_Z(s)\right)$, pour tout $s\in[0,1]$ et :

$$G_Z(s)=\lim_{n\to+\infty}G_{Z_n}(s)=\lim_{n\to+\infty}s\,f\left(G_{Z_{n-1}}(s)\right)=s\,f\left(G_Z(s)\right).$$

Finalement, on obtient bien, pour tout $s\in[0,1]$:

$$\boxed{G_Z(s)=s\,f\left(G_Z(s)\right)}$$

c) On a vu que la fonction *f* est de classe C^1 sur $[0,1]$ et G_Z est dérivable sur $[0,1[$ et à images dans $[0,1]$ (on vient de le voir). Alors, $f\circ G_Z$ est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout $s\in[0,1[$:

$$G_Z'(s)=f\left(G_Z(s)\right)+sG_Z'(s)f'\left(G_Z(s)\right)\quad\Leftrightarrow\quad G_Z'(s)\left[1-s\,f'\left(G_Z(s)\right)\right]=f\left(G_Z(s)\right).$$

On a $\lim\limits_{s\to1}G_Z(s)=1$, donc $\lim\limits_{s\to1}f\left(G_Z(s)\right)=f(1)=1$ et $\lim\limits_{s\to1}f'\left(G_Z(s)\right)=f'(1)=m$ (car toute variable aléatoire suivant la loi µ possède une espérance égale à $m=f'(1)$) et $\lim\limits_{s\to1}\left(1-s\,f'\left(G_Z(s)\right)\right)=1-m$.

- Si $m<1$, alors $1-m\neq0$, donc $s\mapsto1-s\,f'\left(G_Z(s)\right)$ ne s'annule pas au voisinage de 1^- et :

  $$\lim_{s\to1}G_Z'(s)=\lim_{s\to1}\frac{f\left(G_Z(s)\right)}{1-s\,f'\left(G_Z(s)\right)}=\frac{1}{1-m}.$$

  Donc, G_Z est de classe C^1 (car continue en 1 et G_Z' de limite finie en 1), donc dérivable en 1 avec $G_Z'(1)=\dfrac{1}{1-m}$, ce qui permet de conclure que *Z* admet une espérance finie.

- Si $m=1$, alors si *Z* admet une espérance finie, G_Z est de classe C^1 en 1 et :

  $$\lim_{s\to1}G_Z'(s)\left[1-s\,f'\left(G_Z(s)\right)\right]=G_Z'(1)\times0=0=\lim_{s\to1}f\left(G_Z(s)\right)=1.$$

  Ceci est absurde, donc *Z* n'admet pas d'espérance finie.

Finalement :

$$\boxed{Z\text{ est d'espérance finie si et seulement si } m<1 \text{ et dans ce cas } E(Z)=\frac{1}{1-m}.}$$

IV - Un exemple

IV.A **-** Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $p_k=\dfrac{1}{2^{k+1}}$, donc pour tout $t\in[0,1]$:

$$f(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_kt^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}t^k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^k=\frac{1}{2}\frac{1}{1-t/2}.$$

Soit, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2-t}}$$

La fonction f est dérivable en 1, donc toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à :

$$m=f'(1)=\frac{1}{(2-1)^2}.$$

Soit :

$$\boxed{m=1}$$

***IV.B* -** On a vu plus haut que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_{n+1}=f\circ\varphi_n$ avec $\varphi_0=id$. Alors :

- pour tout $t\in[0,1[$, $\varphi_0(t)=t\in[0,1[$;
- si, pour tout $t\in[0,1[$, $\varphi_n(t)\in[0,1[$, on a $\varphi_{n+1}(t)=f\left(\varphi_n(t)\right)=\dfrac{1}{2-\varphi_n(t)}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right[\subset[0,1[$.

Ceci prouve par récurrence que, pour tout $t\in[0,1[$, $\varphi_n(t)\in[0,1[$ et donc que :

$$\boxed{\text{Pour tout } t\in[0,1[,\ \varphi_n(t)\neq 1.}$$

***IV.C* -** D'après ce qui précède, on a pour tout $t\in[0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+1}(t)=\frac{1}{\varphi_{n+1}(t)-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{2-\varphi_n(t)}-1}=\frac{2-\varphi_n(t)}{\varphi_n(t)-1}=\frac{1}{\varphi_n(t)-1}-1=a_n(t)-1.$$

Donc, pour tout $t\in[0,1[$:

$$\boxed{\text{La suite } \left(a_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est arithmétique de raison } -1.}$$

***IV.D* -** Soit $t\in[0,1[$. On a $a_0(t)=\dfrac{1}{\varphi_0(t)-1}=\dfrac{1}{t-1}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n(t)=-n+a_0(t)$ (d'après la question précédente). Alors :

$$\frac{1}{\varphi_n(t)-1}=a_n(t)=-n+a_0(t)=-n+\frac{1}{t-1}=\frac{1-n(t-1)}{t-1}.$$

Donc :

$$\varphi_n(t)=1+\frac{t-1}{1-n(t-1)}=\frac{1-n(t-1)+t-1}{1-n(t-1)}.$$

Soit, pour tout $t\in[0,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\varphi_n(t)=\frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}}$$

***IV.E* -** Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $t\in[0,1[$, on a $0\le\dfrac{n}{n+1}t<1$ donc :

$$\varphi_n(t)=\frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}=\frac{1}{n+1}\big(n+(1-n)t\big)\frac{1}{1-\dfrac{n}{n+1}t}=\frac{1}{n+1}\big(n+(1-n)t\big)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}t\right)^k$$
$$=\frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k+\frac{(1-n)t}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}t^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^{k+1}$$

Si $n=0$, $\varphi_n(t)=t$ et si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}t^k+\frac{1-n}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}t^{k+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k+1}t^k+\frac{1-n}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k}t^k$$
$$=\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{1-n}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k=\frac{n}{n+1}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k t^k$$

Or, $\varphi_n(t)=G_{Y_n}(t)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}P(Y_n=k)t^k$, donc par unicité du développement en série entière :

$$\boxed{\begin{cases}P(Y_0=1)=1\\ \forall\,k\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ P(Y_0=k)=0\end{cases}\quad\text{et}\quad\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \begin{cases}P(Y_n=0)=\dfrac{n}{n+1}\\ \forall\,k\in\mathbb{N}^*,\ P(Y_n=k)=\dfrac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}\end{cases}}$$

***IV.F* -** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a $(T>n)=(Y_n\neq0)=(\overline{Y_n=0})$, donc :

$$P(T>n)=P(\overline{Y_n=0})=1-P(Y_n=0)=1-\frac{n}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P(T>n)=\frac{1}{n+1}}$$

Le calcul effectué dans la question **III.B.2.*a*** reste valable ici, donc si la variable T admet une espérance, alors on a $E(T)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}P(T>n)$ et la série $\sum P(T>n)$ converge. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T>n)=\dfrac{1}{n+1}$ et la série harmonique diverge, donc :

$$\boxed{\text{La variable } T \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

IV.G* -** On a pour cet exemple $m=1$, donc on peut appliquer les résultats de la question ***III.C, en particulier pour tout $s\in[0,1]$, $G_Z(s)=s\,f\big(G_Z(s)\big)$, soit ici :

$$G_Z(s)=\frac{s}{2-G_Z(s)}\quad\Leftrightarrow\quad G_Z(s)\big(2-G_Z(s)\big)=s\quad\Leftrightarrow\quad\big(G_Z(s)-1\big)^2=1-s\,.$$

Et comme on a vu que $G_Z(s)\in[0,1]$, on obtient $1-G_Z(s)=\sqrt{1-s}$, soit pour tout $s\in[0,1]$:

$$\boxed{G_Z(s)=1-\sqrt{1-s}}$$

On a alors, pour tout $s\in[0,1]$:

$$G_Z(s)=1-\sqrt{1-s}=1+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n-1)4^n}\binom{2n}{n}s^n=\sum_{n\geq 0}P(Z=n)s^n .$$

A nouveau grâce à l'unicité du développement en série entière, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases}P(Z=0)=0\\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ P(Z=n)=\dfrac{1}{(2n-1)4^n}\dbinom{2n}{n}\end{cases}}$$

V - Cas surcritique

V.A **-** Pour tous $n,r\in\mathbb{N}^*$, définissons les évènements :

- A_n = « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la première fois au rang *n*. »
- $A_n^{(r)}$ = « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang *n*. »

On a donc $u_n=P(A_n)$ et $u_n^{(r)}=P(A_n^{(r)})$.

Les évènements A_n (*resp.* $A_n^{(r)}$) sont incompatibles deux à deux, donc la série $\sum u_n$ (*resp.* $\sum u_n^{(r)}$) converge avec $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}P(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ (*resp.* $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}A_n^{(r)}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}P(A_n^{(r)})=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n^{(r)}$).

Alors, pour tous $n,r\in\mathbb{N}^*$ et tout $s\in[-1,1]$, on a :

$$0\leq\left|u_ns^n\right|\leq u_n\quad\left(\textit{resp.}\ \ 0\leq\left|u_n^{(r)}s^n\right|\leq u_n^{(r)}\right).$$

Donc, par comparaison, la série $\sum u_ns^n$ (*resp.* $\sum u_n^{(r)}s^n$) converge absolument et ainsi :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_ns^n \text{ et } \sum u_n^{(r)}s^n \text{ convergent quand } s\in[-1,1].}$$

V.B.1) On a $W_1=\sum_{i=1}^{k}X_{0,i}$, donc $\bigcap_{i\in[\![1,k]\!]}(X_{0,i}\geq 2)\subset(W_1>k)$ et :

$$P\left(\bigcap_{i\in[\![1,k]\!]}(X_{0,i}\geq 2)\right)\leq P(W_1>k).$$

Comme les $X_{0,i}$ sont indépendants :

$$\begin{aligned}P\left(\bigcap_{i\in[\![1,k]\!]}(X_{0,i}\geq 2)\right)&=\prod_{i\in[\![1,k]\!]}P(X_{0,i}\geq 2)=\prod_{i\in[\![1,k]\!]}\left[1-P(X_{0,i}=0)-P(X_{0,i}=1)\right]\\&=\prod_{i\in[\![1,k]\!]}(1-p_0-p_1)=(1-p_0-p_1)^k\end{aligned}$$

Or, $p_0+p_1<1$, donc :

$$P(W_1>k)\geq P\left(\bigcap_{i\in[\![1,k]\!]}(X_{0,i}\geq 2)\right)=(1-p_0-p_1)^k>0 .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{P(W_1>k)>0}$$

V.B.2) La probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur *k* est $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n \neq k)\right)$, et on peut montrer que cette probabilité est non nulle, autrement dit que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n \neq k)\right) > 0$.

Comme suggéré, considérons deux cas.

- Si $p_0 = 0$, soit $P(X_{n,i} = 0) = 0$, pour tout $(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, alors chaque individu de chaque génération a une probabilité égale à 1 d'avoir au moins un fils. Alors, comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $W_{n+1} = \sum_{i=1}^{W_n} X_{n,i}$ et les $X_{n,i}$ sont indépendantes, on a $P_{(W_1>k)\cap\ldots\cap(W_n>k)}(W_{n+1}>k) = 1$ et :

$$\begin{aligned} P\left((W_1>k)\cap\ldots\cap(W_n>k)\cap(W_{n+1}>k)\right) &= P\left((W_1>k)\cap\ldots\cap(W_n>k)\right)P_{(W_1>k)\cap\ldots\cap(W_n>k)}(W_{n+1}>k) \\ &= P\left((W_1>k)\cap\ldots\cap(W_n>k)\right) \end{aligned}$$

  Ainsi, la suite $\left(P\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}(W_i>k)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]}(W_i>k)\right) = P(W_1>k).$$

  Et en passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n>k)\right) = P(W_1>k).$$

  Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(W_n>k)\subset(W_n\neq k)$, donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n>k)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)$ et :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)\right) \geq P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n>k)\right) = P(W_1>k).$$

  Enfin, d'après la question précédente, $P(W_1>k)>0$ donc :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)\right) > 0.$$

- Si $p_0 > 0$, avec l'indépendance des $X_{0,i}$, on a :

$$P(W_1=0) = P\left(\sum_{i=1}^{k} X_{0,i} = 0\right) = P\left(X_{0,1}=0, X_{0,2}=0,\ldots,X_{1,k}=0\right) = P(X_{0,1}=0)P(X_{0,2}=0)\ldots P(X_{0,k}=0) = p_0^k > 0.$$

  Or, si $(W_1=0)$, alors $(W_n=0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (s'il n'y a personne à la première génération, il n'y aura jamais personne), donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(W_1=0)\subset(W_n=0)\subset(W_n\neq k)$, d'où :

$$(W_1=0)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n=0)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k).$$

  Alors, toujours avec $P(W_1>k)>0$:

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)\right) \geq P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n=0)\right) \geq P(W_1>k) > 0.$$

Finalement, dans les deux cas, on obtient $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)\right)>0$, donc $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(W_n\neq k)\right)\neq 0$ et ainsi :

La probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur *k* est non nulle.

V.C.1) Rappelons que l'on a noté pour tous $n,r\in\mathbb{N}^*$ $A_n^{(r)}$ = « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang *n*. ». Soient *n* et *r* deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Posons $A_0^{(r-1)} = \overline{\bigcup_{i\in[\![1,n-1]\!]} A_i^{(r-1)}}$. Comme les $A_i^{(r-1)}$ sont disjoints deux à deux, la famille $\left(A_i^{(r-1)}\right)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$ forme un système complet d'évènements, donc la loi des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(A_n^{(r)}) = \sum_{i=0}^{n-1} P(A_i^{(r-1)}) P_{A_i^{(r-1)}}(A_n^{(r)}) .$$

On a $A_0^{(r-1)} =$ « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prend pas la valeur *k* pour la $(r-1)^{\text{ième}}$ fois aux rangs compris entre 1 et $n-1$. ». Or, pour pouvoir $P_{A_0^{(r-1)}}(A_n^{(r)}) = 0$ car prendre la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang *n*, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ doit avoir pris cette valeur $r-1$ fois entre les rangs 1 et $n-1$, donc $P_{A_0^{(r-1)}}(A_n^{(r)}) = 0$.

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(A_i^{(r-1)}) = u_i^{(r-1)}$ et $u_n^{(r)} = P(A_n^{(r)})$. Ainsi :

$$u_n^{(r)} = P(A_n^{(r)}) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i^{(r-1)} P_{A_i^{(r-1)}}(A_n^{(r)}) .$$

Enfin, pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, si $A_i^{(r-1)}$ est réalisé, autrement dit, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la $(r-1)^{\text{ième}}$ fois au rang *i*, alors $W_i = k$ et, comme le nombre de fils d'un individu est indépendant de celui des autres, la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ reprenne la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang *n* est la même que celle que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* pour la première fois au rang $n-i$, soit $P_{A_i^{(r-1)}}(A_n^{(r)}) = P(A_{n-i}) = u_{n-i}$. Ainsi :

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i^{(r-1)} u_{n-i} .$$

Finalement, en posant $j = n-i$, on obtient $u_n^{(r)} = \sum_{j=1}^{n-1} u_{n-j}^{(r-1)} u_j$, soit pour tous $n, r \in \mathbb{N}^*$, supérieurs ou égaux à 2 :

$$\boxed{u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}}$$

V.C.2) On a pour tout $s \in [-1, 1]$, $U(s) = \sum_{n\geq 1} u_n s^n$, $U_r(s) = \sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} s^n$ et :

$$U_{r+1}(s) = \sum_{n\geq 1} u_n^{(r+1)} s^n = u_1^{(r+1)} s + \sum_{n\geq 2} u_n^{(r+1)} s^n = u_1^{(r+1)} s + \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r)} \right) s^n .$$

Or, $u_1^{(r+1)}$ est la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* pour la $(r+1)^{\text{ième}}$ fois (donc au moins deuxième fois) au rang 1, ce qui est impossible, donc $u_1^{(r+1)} = 0$ et :

$$U_{r+1}(s) = \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r)} \right) s^n .$$

Comme les suites, (u_n) et $\left(u_n^{(r)}\right)$ sont positives pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les séries en jeu sont absolument convergentes, et on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$U(s)U_r(s) = \left(\sum_{n\geq 1} u_n s^n \right) \left(\sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} s^n \right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i u_{n-i}^{(r)} \right) s^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r)} s^n + u_n u_0^{(r)} s^n \right).$$

Or, $u_0^{(r)}$ est la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang 0, donc $u_0^{(r)} = 0$ et :

$$U(s)U_r(s) = \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r)} s^n \right) = U_{r+1}(s) .$$

Ainsi, pour tout $s \in [-1,1]$, la suite $(U_r(s))_{r\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $U(s)$, donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$U_r(s) = U_1(s)\big(U(s)\big)^{r-1}.$$

Et comme $U_1(s) = U(s)$, on obtient, pour tout $s \in [-1,1]$, $U_r(s) = \big(U(s)\big)^r$ d'où, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{U_r = U^r}$$

V.D.1) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, appelons C_r l'évènement : « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* au moins *r* fois ».

On cherche alors $P\left(\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} C_r\right)$. Or, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $C_{r+1} \subset C_r$, donc par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} C_r\right) = \lim_{r\to+\infty} P(C_r).$$

Comme $A_n^{(r)}$ = « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la $r^{\text{ième}}$ fois au rang *n* », on a $C_r = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n^{(r)}$ et, comme, à *r* fixé, les $A_n^{(r)}$ sont disjoints deux à deux, on a :

$$P(C_r) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n^{(r)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^{(r)} = U_r(1) = \big(U(1)\big)^r.$$

Enfin, on a $U(s) = \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n)$ où A_n est l'évènement : « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* pour la première fois au rang *n*. » Comme les A_n sont deux à deux disjoints, on a :

$$U(s) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right).$$

Et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ est l'évènement : « La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur *k* au moins une fois ». Or, on a vu que la probabilité que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prenne pas la valeur *k* est non nulle, soit $P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n}\right) > 0$, donc :

$$0 \leq U(s) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n}\right) < 1.$$

Et, avec $0 \leq U(s) < 1$, on a :

$$P\left(\bigcap_{r\in\mathbb{N}^*} C_r\right) = \lim_{r\to+\infty} P(C_r) = \lim_{r\to+\infty} \big(U(1)\big)^r = 0.$$

Ainsi :

La probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* une infinité de fois est nulle.

V.D.2) La question n'est pas très claire. J'avais compris que la variable Y_n est la variable W_n pour $k = 1$ et donc, avec le résultat ci-dessus, valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut immédiatement conclure.

Cependant, la question semble plutôt être : montrer que la probabilité que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* (et non 1) une infinité de fois est nulle.

Notons *A* l'évènement « $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur *k* une infinité de fois » et appelons *N* la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier *k*, autrement dit le minimum de $\{n \in \mathbb{N}^*, Y_n = k\}$. La loi des probabilités totales donne alors :

$$p(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} P(N = i) P_{(N=i)}(A).$$

Or, $P_{(N=i)}(A)$ est la probabilité que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prenne la valeur k une infinité de fois sachant que $Y_i = k$ (et $Y_j \neq k$ pour tout $j < i$). Or, si $Y_i = k$, $(Y_n)_{n\geq i}$ va prendre la valeur k une infinité de fois et la probabilité de cet évènement est la même que celle de W_n (car les $X_{a,b}$ sont indépendantes), soit nulle, donc $P_{(N=i)}(A) = 0$ et donc :

$$p(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} P(N=i)P_{(N=i)}(A) = 0 .$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{La probabilité que la suite } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ prenne la valeur } k \text{ une infinité de fois est nulle.}}$$

***V.E* -** Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(A_n) = 1$, alors $P(\overline{A}_n) = 0$ et $\sum P(\overline{A}_n)$ est une série convergente de somme nulle.

Alors, par sous-additivité, on a :

$$0 \leq P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(\overline{A}_n) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n\Big) = 0}.$$

Comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n}$, on en déduit immédiatement que :

$$\boxed{P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1}$$

***V.F* -** Appelons D l'évènement « $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers l'infini », donc $\beta = P(D)$.

Si D est réalisé alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un rang à partir duquel $Y_n > k$, donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne prend pas la valeur k une infinité de fois (évènement D_k). Ainsi : $\underline{D \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k}$.

Réciproquement, si $\omega \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k$, supposons que $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne diverge pas vers l'infini, alors :

$$\exists\, k\in\mathbb{N},\ \forall\, N\in\mathbb{N},\ \exists\, n \geq N,\ Y_n(\omega) \leq k .$$

Or, ceci implique que $Y_n(\omega) \in [\![0,k]\!]$ une infinité de fois, et comme $[\![0,k]\!]$ est fini, $Y_n(\omega)$ va passer par une même valeur (entre 0 et k) une infinité de fois, ce qui contredit l'hypothèse $\omega \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k$. Ainsi, $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers l'infini et donc : $\underline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k \subset D}$.

Finalement, on a $D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k$, donc :

$$\overline{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{D_k} = \overline{D_0} \cup \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{D_k}\Big).$$

Or, $\overline{D_k}$ = « $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prend la valeur k une infinité de fois » et en particulier, $\overline{D_0}$ est l'évènement « $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'annule une infinité de fois ». Or, dès que $Y_n = 0$, alors $Y_i = 0$ pour tout $i \geq n$, autrement dit, il y a extinction et réciproquement, s'il y a extinction, alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'annule une infinité de fois. Ainsi, $\overline{D_0}$ est l'évènement « il y a extinction » ($\alpha = P(\overline{D_0})$) et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\overline{D_0} \cap \overline{D_k} = \varnothing$ (la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut s'annuler à partir d'un certain rang et passer par k une infinité de fois). Ainsi :

$$\overline{D_0} \cap \Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{D_k}\Big) = \varnothing .$$

Et donc :

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D_0}) + P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{D_k}\Big).$$

Enfin, on a vu dans la question **V.D.2** que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(\overline{D_k}) = 0$, donc d'après la question précédente, on a $P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \overline{D_k}\right) = 0$, donc :

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D_0}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(D) = P(\overline{D_0}) \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{D_0}) + P(D) = 1.$$

Soit, avec $\alpha = P(\overline{D_0})$ et $\beta = P(D)$:

$$\boxed{\alpha + \beta = 1}$$