Corrigés des TD du chapitre 15

Exercice 1

1) L'application $\varphi : (P,Q) \mapsto (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est bien définie sur $\left(\mathbb{R}_n[X]\right)^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans $\mathbb{R}$) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans $\mathbb{R}$).

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P \mid P) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$, donc φ est positive et donc, φ est produit scalaire si et seulement si φ est définie. Or, on a :

$$(P \mid P) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n) = 0 .$$

Donc, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont racines de *P*. Si les a_k sont distincts deux à deux, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ possède $n+1$ racine distincts, donc *P* est nul. Dans ce cas, φ est définie.

Par contre, si les a_k ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_0 = a_1$, et dans ce cas, avec $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $(P \mid P) = 0$ avec $P \neq 0$, donc φ n'est pas définie.

Finalement, φ est définie si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux, et donc :

$(P,Q) \mapsto (P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est produit scalaire si et seulement si les a_k sont distincts deux à deux.

2) Remarquons que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$ (le symbole de Kronecker).

On a pour tous $i, j \in [\![0,n]\!]$:

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j} .$$

Donc, la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est orthonormée et comme elle contient $n+1 = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right)$ polynômes :

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Remarquons déjà que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = \|P\|^2$ (où $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc $\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2\right) = \inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)$.

Par ailleurs, si on pose $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_n$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = \sum_{k=0}^{n} L(a_k)P(a_k) = (L \mid P) .$$

Donc, $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=1\right\}$. Mais, $(L\mid L)=n+1$, soit $\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)=1$ (donc $\frac{1}{n+1}L\in F$) et :

$$F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus(L\mid P)=\left(L\,\middle|\,\frac{1}{n+1}L\right)\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus\left(L\,\middle|\,P-\frac{1}{n+1}L\right)=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus L\perp P-\frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout $P\in F$, on a $L\perp P-\frac{1}{n+1}L$, donc $\frac{1}{n+1}L\perp P-\frac{1}{n+1}L$ et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L+P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2+\left\|P-\frac{1}{n+1}L\right\|^2\geq\left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2=\frac{1}{n+1}\quad\Rightarrow\quad\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\geq\frac{1}{n+1}.$$

Or, $\frac{1}{n+1}L\in F$, donc $\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)\leq\frac{1}{n+1}$ et finalement :

$$\boxed{\inf_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)=\inf_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\min_{P\in F}\left(\|P\|^2\right)=\frac{1}{n+1}}$$

Exercice 2

1) On a :

- $(\cdot\mid\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi$.

  Or, φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $P^2\varphi\geq 0$ sur $[-1;1]$ et par positivité de l'intégrale, on a $(P\mid P)\geq 0$ donc $(\cdot\mid\cdot)$ est positive.
- On a :

$$\begin{aligned}(P\mid P)=\int_{-1}^{1}P^2\varphi=0\quad&\Leftrightarrow\quad P^2\varphi=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2\varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1])\\&\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)}\\&\Leftrightarrow\quad P=0 \text{ (car P admet une infinité de racines donc est nul)}\end{aligned}$$

  Ainsi, $(\cdot\mid\cdot)$ est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot\mid\cdot)\text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E permet de construire une base orthonormée $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_k=\frac{R_k}{\|R_k\|}$ avec $R_0=1$ et pour tout $k\geq 1$, $R_k=X^k-(X^k\mid P_{k-1})P_{k-1}-\dots-(X^k\mid P_0)P_0$.

Alors, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k=k$ et le coefficient dominant de P_k est $\frac{1}{\|R_k\|}>0$ et ainsi, il existe bien une base orthonormée de E, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases : $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$.

Notons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k > 0$ et $b_k > 0$ les coefficients dominants respectifs de P_k et Q_k.

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $Q_k = P_k$.

- Pour $k = 0$, P_0 et Q_0 sont tous deux degré 0, donc $Q_0 = \lambda P_0$ avec $b_0 = \lambda a_0$ donc $\lambda > 0$, et :

$$1 = (Q_0 \mid Q_0) = \lambda^2 (P_0 \mid P_0) = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \ \ (\text{car } \lambda > 0).$$

  Ainsi, $Q_0 = P_0$ et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang $k \in [\![0, n-1]\!]$.

  Alors, $R = \dfrac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \dfrac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k donc $R = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P_i$.

  Mais alors, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $Q_i = P_i$ et :

$$\lambda_i = (R \mid P_i) = (\frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \mid P_i) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid P_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = \frac{1}{b_{k+1}}(Q_{k+1} \mid Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}}(P_{k+1} \mid P_i) = 0.$$

  Donc $R = 0$, soit $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$ avec $\lambda = \dfrac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$. On obtient $\lambda = 1$ comme plus haut.

  Ainsi, $Q_{k+1} = P_{k+1}$ et la propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi :

Il existe une unique base orthonormée de *E*, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de $(X^2 - 1)^k$ est X^{2k} donc le terme de plus haut degré de Q_k est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!}X^k$$

Ainsi :

$$\boxed{Q_k \text{ est de degré } k \text{ et de coefficient dominant } \frac{(2k)!}{k!}.}$$

b. La famille $(Q_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est donc une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $E = \mathbb{R}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$. Ainsi :

$$\boxed{(Q_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \text{ est une base de } E.}$$

c. Posons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = (X^2 - 1)^k$. On a alors, $Q_k = P_k^{(k)}$.

Remarquons que comme – 1 et 1 sont racines de multiplicité *k* dans P_k, ces deux réels sont racines de $P_k^{(p)}$ pour tout entier compris entre 0 et $k-1$.

Alors, pour tout $(i,j)\in [\![0,n]\!]^2$, on a, en intégrant deux fois par parties :

$$(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i)}(t)P_j^{(j)}(t)dt=\left[P_i^{(i)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt=-\int_{-1}^{1} P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt$$
$$=-\left[P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-1)}(t)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1} P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+2)}(t)P_j^{(j-2)}(t)dt$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout $p\le j$, $(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+p)}(t)P_j^{(j-p)}(t)dt$ et en particulier pour $p=j$:

$$(Q_i \mid Q_j)=\int_{-1}^{1} P_i^{(i+j)}(t)P_j(t)dt\,.$$

Mais, si $i<j$, alors $i+j>2i=\deg P_i$, donc $P_i^{(i+j)}=0$ et ainsi, $(Q_i \mid Q_j)=0$.

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi $(Q_i \mid Q_j)=0$ pour $i>j$ et ainsi, $(Q_i \mid Q_j)=0$ pour $i\neq j$ donc :

$$\boxed{\text{La famille } (Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]} \text{ est une base orthogonale de } E.}$$

Exercice 3

L'identité du parallélogramme est $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$, qui est donc vérifiée ici pour tout $(x,y)\in E^2$. Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout $(x,y)\in E^2$, $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=4(x \mid y)$, soit :

$$(x \mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right).$$

Il faut donc montrer que $(x,y)\mapsto (x \mid y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ est un produit scalaire sur *E*.

Cette application va de E^2 dans $\mathbb{R}$ et est symétrique ($\|x+y\|=\|y+x\|$ et $\|x-y\|=\|y-x\|$).

De plus, pour tout $x\in E$, $(x \mid x)=\frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2-\|x-x\|^2\right)=\|x\|^2\ge 0$ et $(x \mid x)=\|x\|^2=0$ équivaut à $x=0$ (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entrainera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient $(x,x',y)\in E^3$. On a :

$$4(x+x' \mid y)=\|x+x'+y\|^2-\|x+x'-y\|^2=\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y+x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x+\frac{1}{2}y-x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

$$\left\|x-\frac{1}{2}y+x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\left\|x-\frac{1}{2}y-x'+\frac{1}{2}y\right\|^2=2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-\|x-x'\|^2$$

Donc :

$$\begin{aligned}4(x+x'\mid y) &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right)-2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\\ &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right)\end{aligned}.$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout $(X,Y)\in E^2$:

$$\|X\|^2+\|Y\|^2=\frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2\right).$$

Donc :

$$\begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2+\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|x-y\|^2\right)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2+\|x\|^2\right)-\left\|\frac{1}{2}y\right\|^2\end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)=2(x\mid y).$$

On a bien sûr de même $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2-\left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2=2(x'\mid y)$ et donc :

$$4(x+x'\mid y)=2\left[2(x\mid y)+2(x'\mid y)\right]=4\left[(x\mid y)+(x'\mid y)\right].$$

Ainsi, pour tout $(x,x',y)\in E^3$:

$$(x+x'\mid y)=(x\mid y)+(x'\mid y) \quad \textbf{(1)}.$$

Soit maintenant $(x,y)\in E^2$. Posons pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f(\lambda)=(\lambda x\mid y)=\frac{1}{4}\left(\|\lambda x+y\|^2-\|\lambda x-y\|^2\right).$$

L'application *f* est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

De plus, comme $X\mapsto\|X\|$ est continue sur *E* (car 1-liptschizienne du fait de l'inégalité triangulaire), *f* est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda+\mu)=\big((\lambda+\mu)x\mid y\big)=(\lambda x+\mu x\mid y)=(\lambda x\mid y)+(\mu x\mid y)=f(\lambda)+f(\mu).$$

Ainsi, *f* est une application continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(\lambda+\mu)=f(\lambda)+f(\mu)$ pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, donc *f* est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout $(\lambda,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}$, $f(n\lambda)=nf(\lambda)$, puis on évalue *f* sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ par continuité, grâce à densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Il existe donc un réel fixé *a* tel que pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda)=a\lambda$ et $a=f(1)=(x\mid y)$, donc pour tout $(x,y)\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda x\mid y)=\lambda(x\mid y) \quad \textbf{(2)}.$$

Les résultats **(1)** et **(2)** prouvent que $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ est linéaire à gauche et ainsi, $(x, y) \mapsto (x \mid y)$ est un produit scalaire, donc :

$$\boxed{\text{Toute norme de } E \text{ vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.}}$$

Exercice 4

Si la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = 0$ et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de E (qui est de de dimension n) et les x_k sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de E, $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ avec pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1} \mid e_1)e_1 - (x_{k+1} \mid e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1} \mid e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\left[x_n - (x_n \mid e_1)e_1 - (x_n \mid e_2)e_2 - \dots - (x_n \mid e_{n-1})e_{n-1}\right]\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}\left[x_{n-1} - (x_{n-1} \mid e_1)e_1 - (x_{n-1} \mid e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1} \mid e_{n-2})e_{n-2}\right], x_n\right) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|}x_{n-1}, x_n\right) = \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\
&= \frac{1}{\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\|x_1\|}x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\right) \\
&= \frac{1}{\|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|}\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.\left|\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)\right|$$

Or, $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det P$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^tPP = I_n$ et :

$$\det({}^tPP) = \left(\det {}^tP\right)\left(\det P\right) = \left(\det P\right)^2 = \det I_n = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)\right| = \left|\det P\right| = 1.$$

Ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right| = \|x_1\|.\|\varepsilon_2\|\dots\|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:

$$x_k = \|\varepsilon_k\|e_k + (x_k \mid e_1)e_1 + (x_k \mid e_2)e_2 + \dots + (x_k \mid e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\varepsilon_k\|^2 + (x_k \mid e_1)^2 + (x_k \mid e_2)^2 + ... + (x_k \mid e_{k-1})^2 \geq \|\varepsilon_k\|^2 \quad \Rightarrow \quad \|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc, $\|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\| \leq \|x_2\| ... \|x_{n-1}\|.\|x_n\|$ et ainsi :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$\boxed{\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| \leq \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\|}$$

Il est clair que si l'un des x_k est nul, alors $\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\| = 0$.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée, alors on a $\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = 0 < \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\|$.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \neq 0$ et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\| \quad \Leftrightarrow \quad \|x_2\| ... \|x_n\| = \|\varepsilon_2\| ... \|\varepsilon_{n-1}\|.\|\varepsilon_n\|.$$

Comme pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|$, aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)\right| = \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\| \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ \|x_k\| = \|\varepsilon_k\| \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ (x_k \mid e_1) = (x_k \mid e_2) = (x_k \mid e_{k-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_{k-1})\right)^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, k \in [\![2, n]\!],\ x_k \in \left(\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_{k-1})\right)^{\perp}
\end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ était initialement orthogonale.

Finalement :

$\left|\det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right| = \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\|$ si et seulement si l'un des x_k est nul ou la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est orthogonale.

Exercice 5

On a $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$: $(x \mid y) = 0 \Rightarrow \left(f(x) \mid f(y)\right) = 0$.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + y \mid x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y \mid x - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0.$$

Et :

$$\left(f(x + y) \mid f(x - y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(f(x) + f(y) \mid f(x) - f(y)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$, on a $\|f(x)\| = \|f(y)\|$, donc $x \mapsto \|f(x)\|$ est constante sur la sphère unité de centre 0_E.

Autrement dit, il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, on a, $\|f(x)\| = k$.

Mais alors, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| = k\|x\| .$$

Et bien sûr, $\|f(0_E)\| = \|0_E\| = 0 = k\|0_E\|$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in E,\ \|f(x)\| = k\|x\|.}$$

Exercice 6

1) On a par définition :

$$\boxed{rg(A) = rg(\mathcal{F})}$$

2) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, appelons $(x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i})$ les coordonnées de x_i dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

On a alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} x_{k,j} .$$

Par ailleurs, $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^tA = (x_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc ${}^tAA$ est définie et ${}^tAA \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose ${}^tAA = (a_{i,j})$, on a pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} x_{k,j} = (x_i \mid x_j) .$$

Ainsi :

$$\boxed{G = {}^tAA}$$

3) Soit $X \in \ker A$. On a :

$$({}^tAA)X = {}^tA(AX) = {}^tA0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X \in \ker({}^tAA).$$

Ainsi :

$$\underline{\ker A \subset \ker({}^tAA)} .$$

Soit maintenant $X \in \ker({}^tAA)$, on a :

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = ({}^tX\,{}^tA)(AX) = {}^tX({}^tAAX) = {}^tX0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|AX\| = 0 \quad \Rightarrow \quad AX = 0 \quad \Rightarrow \quad X \in \ker({}^tAA) .$$

Ainsi :

$$\underline{\ker({}^tAA) \subset \ker A} .$$

Finalement :

$$\boxed{\ker({}^tAA) = \ker A}$$

Par le théorème du rang, on a $rg(A)+\dim\left(\ker A\right)=p$ et $rg({}^tAA)+\dim\left(\ker({}^tAA)\right)=p$.

Or, comme $\ker({}^tAA)=\ker A$, on a $\dim\left(\ker({}^tAA)\right)=\dim\left(\ker A\right)$ et ainsi, $rg({}^tAA)=rg(A)$.

Comme $G={}^tAA$ et $rg(A)=rg(\mathcal{F})$, on a finalement :

$$\boxed{rg(\mathcal{F})=rg(G)}$$

4) On a $\det G=\det({}^tAA)=(\det{}^tA)\times(\det A)=(\det A)^2$, donc :

$$\boxed{\det G\geq 0}$$

On a $\det G=0$ quand $rg(G)=rg(x_1,x_2,\dots,x_p)<p$, donc :

$$\boxed{\det G=0 \text{ si et seulement si } \mathcal{F}=(x_1,x_2,\dots,x_p) \text{ est liée.}}$$

5) Si $x\in F$, alors $d(x,F)=0$ et la famille $(e_1,e_2,\dots,e_p,x)$, donc $\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,x)=0$ et la formule désirée est vérifiée (les deux membres valent 0).

Si $x\notin F$, posons $e_{p+1}=x-p_F(x)\neq 0$, où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

On a alors $d^2=d(x,F)^2=\left\|e_{p+1}\right\|^2=(e_{p+1}\mid e_{p+1})$ et $e_{p+1}\in F^\perp$, donc pour tout $k\in[\![1,p]\!]$, $(e_k\mid e_{p+1})=0$. Ainsi :

$$G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=\begin{pmatrix}(e_1\mid e_1)&\cdots&(e_1\mid e_p)&(e_1\mid e_{p+1})\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ (e_1\mid e_p)&\cdots&(e_p\mid e_p)&(e_p\mid e_{p+1})\\ (e_1\mid e_{p+1})&\cdots&(e_p\mid e_{p+1})&(e_{p+1}\mid e_{p+1})\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccc|c}&&&0\\&G(e_1,e_2,\dots,e_p)&&\vdots\\&&&0\\ \hline 0&\cdots&0&d^2\end{array}\right).$$

Alors :

$$\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=\det\left(\begin{array}{ccc|c}&&&0\\&G(e_1,e_2,\dots,e_p)&&\vdots\\&&&0\\ \hline 0&\cdots&0&d^2\end{array}\right)=d^2\det G(e_1,e_2,\dots,e_p).$$

Par ailleurs :

$$\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1)&\cdots&(e_1\mid e_p)&\left(e_1\mid x-p_F(x)\right)\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ (e_1\mid e_p)&\cdots&(e_p\mid e_p)&\left(e_p\mid x-p_F(x)\right)\\ (e_1\mid e_{p+1})&\cdots&(e_p\mid e_{p+1})&\left(e_{p+1}\mid x-p_F(x)\right)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1)&\cdots&(e_1\mid e_p)&(e_1\mid x)-\left(e_1\mid p_F(x)\right)\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ (e_1\mid e_p)&\cdots&(e_p\mid e_p)&(e_p\mid x)-\left(e_p\mid p_F(x)\right)\\ (e_1\mid e_{p+1})&\cdots&(e_p\mid e_{p+1})&(e_{p+1}\mid x)-\left(e_{p+1}\mid p_F(x)\right)\end{vmatrix}$$

Or, $p_F(x)\in F=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_p)$, donc $p_F(x)=\sum_{i=1}^{p}a_ie_i$ et :

$$\begin{pmatrix}\left(e_1\mid p_F(x)\right)\\ \vdots\\ \left(e_p\mid p_F(x)\right)\\ \left(e_{p+1}\mid p_F(x)\right)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{p}a_i\begin{pmatrix}(e_1\mid e_i)\\ \vdots\\ (e_p\mid e_i)\\ (e_{p+1}\mid e_i)\end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & (e_1\mid x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_1\mid e_p) & \cdots & (e_p\mid e_p) & (e_p\mid x)\\ (e_1\mid e_{p+1}) & \cdots & (e_p\mid e_{p+1}) & (e_{p+1}\mid x)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & (e_1\mid x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_1\mid e_p) & \cdots & (e_p\mid e_p) & (e_p\mid x)\\ (e_1\mid x)-\left(e_1\mid p_F(x)\right) & \cdots & (e_p\mid x)-\left(e_p\mid p_F(x)\right) & (x\mid x)-\left(x\mid p_F(x)\right)\end{vmatrix}$$

Et comme plus haut, on a ${}^t\begin{pmatrix}\left(e_1\mid p_F(x)\right)\\ \vdots\\ \left(e_p\mid p_F(x)\right)\\ \left(x\mid p_F(x)\right)\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{p}a_i\ {}^t\begin{pmatrix}(e_1\mid e_i)\\ \vdots\\ (e_p\mid e_i)\\ (x\mid e_i)\end{pmatrix}$ donc :

$$\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=\begin{vmatrix}(e_1\mid e_1) & \cdots & (e_1\mid e_p) & (e_1\mid x)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (e_1\mid e_p) & \cdots & (e_p\mid e_p) & (e_p\mid x)\\ (e_1\mid x) & \cdots & (e_p\mid x) & (x\mid x)\end{vmatrix}=\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,x).$$

Ainsi, on a :

$$\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1})=d^2\det G(e_1,e_2,\dots,e_p)=\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,x).$$

Et comme la famille $(e_1,e_2,...,e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\det G(e_1,e_2,\dots,e_p)\neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{d^2=d(x,F)^2=\frac{\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,x)}{\det G(e_1,e_2,\dots,e_p)}}$$

Exercice 7

On a d'une part $x^2f(x)=x^{3/2}\left(x^{1/2}f(x)\right)$, donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 x^2f(x)dx\right)^2\leq\left(\int_0^1 x^3dx\right)\left(\int_0^1 xf(x)^2dx\right)=\frac{1}{4}\int_0^1 xf(x)^2dx.$$

Et, comme f est positive sur $[0;1]$, on peut écrire $xf(x)^2=xf(x)^{1/2}f(x)^{3/2}$, d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 xf(x)^2dx\right)^2\leq\left(\int_0^1 x^2f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3dx\right).$$

Alors, comme f est positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 x f(x)^2 dx \geq 0$ et :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)^2 \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \leq \left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)^3 dx\right) \quad \textbf{(*)}.$$

Enfin, comme f est positive et continue sur $[0;1]$, $x \mapsto x^2 f(x)$ est positive et continue sur $[0;1]$, donc $\int_0^1 x^2 f(x)dx \geq 0$ et si $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 0$, alors $x \mapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $[0;1]$, donc f l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si f n'est pas nulle sur $[0;1]$, alors $\int_0^1 x^2 f(x)dx > 0$ et on peut simplifier **(*)**, ce qui donne :

$$\boxed{4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx}$$

Exercice 8

1) Quels que soient P,Q de $\mathbb{R}[X]$, l'application $t \mapsto \sqrt{1-t}P(t)Q(t)$ est continue sur $\left[-1,1\right]$ et l'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ est continue sur $\left]-1,1\right]$ et intégrable sur $\left[-1,1\right]$, donc $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)$ est continue sur $\left]-1,1\right]$ et intégrable sur $\left[-1,1\right]$, et ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } (P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}[X]^2.}$$

L'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $t \in \left]-1,1\right]$, $\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}P(t)^2 \geq 0$, donc :

$$\langle P,P \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)^2\,dt \geq 0.$$

Enfin, si $\langle P,P \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}P(t)^2\,dt = 0$, alors comme l'application $t \mapsto \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}P(t)^2$ est continue et positive sur $\left]-1,1\right]$, elle est nulle sur cet intervalle. Comme $\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ ne s'annule qu'en 1, P s'annule en tout point de $\left]-1,1\right[$, donc admet une infinité de racines, donc le polynôme P est nul.

Finalement, $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, donc :

$$\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2) Remarquons que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\phi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P' = (X^2-1)P'' + 2XP' + P' = [(X^2-1)P']' + P'.$$

Donc, pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, en posant $R = (X^2-1)P'$, on a :

$$\langle \phi(P),Q \rangle = \langle R'+P',Q \rangle = \langle R',Q \rangle + \langle P',Q \rangle.$$

Et, pour tout $[a,b] \subset]-1,1[$, $t \mapsto R(t)$ et $t \mapsto \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q(t)$ sont C^1 sur $[a,b]$, et par intégration par parties :

$$\int_a^b R'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q(t)\,dt = \left[R(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q(t)\right]_a^b - \int_a^b R(t)\left[\frac{-\frac{2}{(1+t)^2}}{2\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}Q(t) + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q'(t)\right]dt$$

$$= \left[(t^2-1)P'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q(t)\right]_a^b - \int_a^b (t^2-1)\left[-\frac{1}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}Q(t) + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q'(t)\right]dt$$

$$= \left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_a^b - \int_a^b \frac{(1-t^2)}{(1+t)^{3/2}\sqrt{1-t}}P'(t)Q(t)\,dt + \int_a^b (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt$$

$$= \left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_a^b - \int_a^b \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,P'(t)Q(t)\,dt + \int_a^b (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt$$

Et, en faisant tendre a vers – 1 et b vers 1, on obtient :

$$\int_{-1}^1 R'(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,Q(t)\,dt = \left[(t-1)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,P'(t)Q(t)\,dt + \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt\,.$$

Soit :

$$\langle R',Q\rangle = -\langle P',Q\rangle + \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt\,.$$

Et encore :

$$\langle \phi(P),Q\rangle = \langle R',Q\rangle + \langle P',Q\rangle = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt\,.$$

On a alors :

$$\langle P,\phi(Q)\rangle = \langle \phi(Q),P\rangle = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,Q'(t)P'(t)\,dt = \int_{-1}^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}\,P'(t)Q'(t)\,dt = \langle \phi(P),Q\rangle\,.$$

Ainsi, pour tous $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P,\phi(Q)\rangle = \langle \phi(P),Q\rangle$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } \phi \text{ est symétrique pour le produit scalaire considéré.}}$$

3) On a $\phi(1)=0$, $\phi(X)=2X+1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$:

$$\phi(X^n) = (X^2-1)n(n-1)X^{n-2} + (2X+1)nX^{n-1} = n(n+1)X^n + nX^{n-1} - n(n-1)X^{n-2}\,.$$

Ainsi, $\phi(1)=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\deg\big(\phi(X^n)\big)=n$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ, d'où :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ \phi \text{ induit un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Notons ϕ_n cet endomorphisme induit. Comme ϕ est symétrique (pour le produit scalaire considéré), ϕ_n l'est aussi et donc, d'après le théorème spectral (on est dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme induit } \phi_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ un éventuel polynôme unitaire (non nul) de degré *k* tel que $\phi(P_k) = \lambda P_k$.

- Si $k = 0$, alors $P_0 = 1$ et on a $\phi(P_0) = 0 = 0P_0$, donc 0 est valeur propre et 1 est un vecteur propre associé.
- Si $k = 1$, alors $P_1 = X + \alpha$ et on a $\phi(P_1) = \phi(X) = 2X + 1 = 2\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$, donc 2 est valeur propre et $P_1 = X + \dfrac{1}{2}$ est un vecteur propre associé.
- Si $k \geq 2$, on peut poser $P_k = X^k + Q_k$ avec $\deg Q_k \leq k-1$ et :

$$\phi(P_k) = \phi(X^k) + \phi(Q_k) = k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k).$$

  Comme $Q_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\phi(Q_k) \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, donc $\deg\left[kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k)\right] \leq k-1$. Alors :

$$\phi(P_k) = \lambda P_k \quad \Leftrightarrow \quad k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \phi(Q_k) = \lambda X^k + \lambda Q_k \quad \Rightarrow \quad \lambda = k(k+1).$$

Remarquons que dans tous les cas, si un polynôme P_k de degré k est un vecteur propre de ϕ, alors la valeur propre associée est $k(k+1)$.

Réciproquement, soit $k \in [\![0,n]\!]$.

On a vu plus haut que $\phi(1) = 0$ et pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\deg\left(\phi(X^d)\right) = d$, donc pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$, on a :

- $\phi(P) = 0$ si $d = 0$;
- $\deg\left(\phi(P)\right) = d$ si $d > 0$.

Ceci prouve déjà que $\phi(P) = 0$ si et seulement si *P* est constant. Donc :

0 est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}(1)\ (= \ker\phi)$.

De plus, $k(k+1) = 0$ si et seulement si $k = 0$.

On suppose maintenant que $k \in [\![1,n]\!]$ (donc $k(k+1) \neq 0$).

Cherchons alors un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et tel que $\phi(P) = k(k+1)P$.

On a vu plus haut que le terme de plus haut degré de $\phi(P)$ et $d(d+1)X^d$, et celui de $k(k+1)P$ est $k(k+1)X^d$, donc $d(d+1) = k(k+1)$, qui implique immédiatement que $d = k$ (car $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, *P* est de degré *k*.

Si $k = 1$, alors, comme plus haut, $\phi(P) = 2P$ donne $P = X + \dfrac{1}{2}$. Donc :

$1 \times (1+1) = 2$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}\left(X + \dfrac{1}{2}\right)$.

Si $k = 2$, $P = X^2 + aX + b$ et :

$$\phi(P) = k(k+1)P \quad \Leftrightarrow \quad 6X^2 + 2X - 2 + a(2X+1) = 6X^2 + 6aX + 6b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2(a+1) = 6a \\ a - 2 = 6b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -1/4 \end{cases}$$

Donc :

$2 \times (2+1) = 6$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}\left(X^2 + \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}\right)$.

Si $k \geq 3$, $P = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ et :

$$\begin{aligned}
\phi(P) = k(k+1)P \quad &\Leftrightarrow \quad \phi\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \right) = k(k+1)\left(X^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \right) \\
&\Leftrightarrow \quad \phi(X^k) + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \phi(X^i) = k(k+1)X^k + k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \\
&\Leftrightarrow \quad k(k+1)X^k + kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \sum_{i=2}^{k-1} a_i \left[i(i+1)X^i + iX^{i-1} - i(i-1)X^{i-2} \right] \\
&\qquad\qquad + a_1(2X+1) = k(k+1)X^k + k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i \\
&\Leftrightarrow \quad kX^{k-1} - k(k-1)X^{k-2} + \sum_{i=0}^{k-1} a_i \left[i(i+1)X^i + iX^{i-1} - i(i-1)X^{i-2} \right] = k(k+1)\sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i
\end{aligned}$$

Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases}
a_{k-1} = \dfrac{1}{2} \\
a_{k-2} = \dfrac{(k-1)\left[a_{k-1} - k\right]}{2(2k-1)} \\
a_i = \dfrac{(i+1)\left[a_{i+1} - (i+2)a_{i+2}\right]}{k(k+1) - i(i+1)} \quad \forall\, i \in [\![2, k-3]\!] \\
a_1 = \dfrac{2a_2 - 6a_3}{k(k+1)} \\
a_0 = -\dfrac{2a_2}{k(k+1)}
\end{cases}$$

Ce système admet une et une seule solution et ainsi, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que $\phi(P_k) = k(k+1)P_k$, donc :

$k(k+1)$ est valeur propre de ϕ_n, de sous-espace propre associé la droite $\mathrm{Vect}\,(P_k)$.

Finalement, les valeurs propres de ϕ_n sont les $k(k+1)$ avec $k \in [\![0,n]\!]$ et les sous-espaces propre associé sont droites $\mathrm{Vect}\,(P_k)$ avec $\deg\,(P_k) = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

Comme $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathrm{Vect}\,(P_k)$, la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ de vecteurs propres de ϕ, telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

Enfin, soient $i, j \in [\![0,n]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après ce que l'on a vu plus haut $i(i+1) \neq j(j+1)$ et :

$$\left\langle P_i, \phi(P_j) \right\rangle = \left\langle \phi(P_i), P_j \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle P_i, j(j+1)P_j \right\rangle = \left\langle i(i+1)P_i, P_j \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left[j(j+1) - i(i+1) \right]\left\langle P_i, P_j \right\rangle = 0.$$

Et comme $j(j+1) - i(i+1) \neq 0$, on obtient $\left\langle P_i, P_j \right\rangle = 0$, donc les P_k sont orthogonaux deux à deux.

En définitive :

$$\boxed{\text{Il existe une base orthogonale de vecteurs propres } (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ telle que pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \deg P_k = k.}$$

Exercice 9

1) Soient $f, g \in E$. On a :

$$\left(|f|-|g|\right)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |fg| \leq \frac{1}{2}(f^2+g^2).$$

Comme f^2 et g^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, fg l'est aussi par comparaison, donc $\langle f, g\rangle$ est défini :

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt \text{ est bien définie sur } E^2.}$$

L'application $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt$ est symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de l'intégrale). De plus, pour tout $f \in E$, $f^2 \geq 0$, donc $\langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt \geq 0$.

Enfin, si $\langle f, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,dt = 0$, alors comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f^2 est continue et positive sur $\mathbb{R}$, elle est donc nulle. Ainsi, $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f = 0$.

Finalement, $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur *E*, donc :

$$\boxed{(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Remarquons déjà que comme Q_r est inversible, 0 n'est pas valeur propre. De plus, par symétrie du produit scalaire, Q_r est symétrique (réelle), donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, prouver que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive revient à prouver que toutes les valeurs propres de Q_r sont positives (forcément strictement d'après ce qui précède). Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de Q_r et $X = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ un vecteur propre associé (non nul).

On a alors, avec la linéarité à droite du produit scalaire et en posant $\varphi = \sum_{j=1}^{r} x_j \varphi_j$:

$$Q_r X = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, r]\!],\ \sum_{j=1}^{r} \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle x_j = \left\langle \varphi_i, \sum_{j=1}^{r} x_j \varphi_j \right\rangle = \langle \varphi_i, \varphi\rangle = \lambda x_i.$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \langle \varphi_i, \varphi\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{r} x_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \varphi, \varphi\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{r} x_i^2.$$

Comme $X \neq 0$, on a $\sum_{i=1}^{r} x_i^2 > 0$ et, avec $\langle \varphi, \varphi\rangle \geq 0$, on obtient :

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, \varphi\rangle}{\sum_{i=1}^{r} x_i^2} \geq 0.$$

Ainsi, toutes les valeurs propres de Q_r sont positives, donc strictement positives et :

$$\boxed{\text{La plus petite valeur propre de } Q_r \text{ est strictement positive.}}$$

3) On suppose toujours Q_r inversible et on veut :

$$\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \iff Q_{r+1} \text{ est non inversible.}$$

Dans ce qui suit, notons $C_1, \dots, C_r, C_{r+1}$ les colonnes Q_{r+1} et $C_1', \dots, C_r'$ celles de Q_r.

($\Rightarrow$) On suppose que $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

Il existe donc $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, et :

$$C_{r+1} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_{r+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_{r+1} \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \rangle \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_1 \rangle \end{pmatrix} + \dots + a_r \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_r \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_r, \varphi_r \rangle \\ \langle \varphi_{r+1}, \varphi_r \rangle \end{pmatrix} = a_1 C_1 + \dots + a_r C_r.$$

Donc, une colonne de Q_{r+1} est combinaison linéaire des autres, ce qui prouve que :

$$Q_{r+1} \text{ n'est pas inversible.}$$

($\Leftarrow$) On suppose que Q_{r+1} n'est pas inversible.

Alors, les colonnes de Q_{r+1} sont liées, autrement dit, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que :

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r + \lambda_{r+1} C_{r+1} = 0.$$

Si $\lambda_{r+1} = 0$, alors $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_r C_r = 0$ et en supprimant la dernière coordonnée de chaque colonne, on obtient $\lambda_1 C_1' + \dots + \lambda_r C_r' = 0$. Or, Q_r est inversible, donc ses colonnes forment une famille libre et ainsi, on a $\lambda = \dots = \lambda_r = 0 = \lambda_{r+1}$, ce qui est absurde car les λ_k ne sont pas tous nuls.

Ainsi, $\lambda_{r+1} \neq 0$ et on peut écrire :

$$C_{r+1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}} C_1 - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} C_r = a_1 C_1 + \dots + a_r C_r.$$

En posant $\varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, ceci implique que pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$:

$$\langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = a_1 \langle \varphi_i, \varphi_1 \rangle + \dots + a_r \langle \varphi_i, \varphi_r \rangle = \langle \varphi_i, a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r \rangle = \langle \varphi_i, \varphi \rangle.$$

En particulier $\langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle$ et :

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi \rangle \iff \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i \varphi_i, \varphi \right\rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Alors :

$$\langle \varphi_{r+1} - \varphi, \varphi_{r+1} - \varphi \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle - 2\langle \varphi_{r+1}, \varphi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle = 0.$$

Et donc $\varphi_{r+1} = \varphi = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$, d'où :

$$\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r) \text{ si et seulement si } Q_{r+1} \text{ est non inversible.}}$$

4) Pour tout $n \in [\![1, r]\!]$, $\varphi_n \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

Prouvons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, .

- Pour $k = 1$, comme Q_r est inversible et Q_{r+1} ne l'est pas, on a $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ d'après la question précédente, donc il existe $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $\varphi_{r+1} = a_1\varphi_1 + \dots + a_r\varphi_r$.

  Ainsi, la propriété est vraie au rang 1.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $k \in \mathbb{N}^*$.

  Posons $\psi = a_1\varphi_{1+k} + \dots + a_r\varphi_{r+k} = \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_{i+k}$. On a :

  $$\langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \varphi_i, \varphi_{r+1} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_i, \varphi_{r+1} \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  $$\langle \psi, \psi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_{i+k}, \sum_{j=1}^{r} a_j\varphi_{j+k} \right\rangle = \sum_{1 \le i, j \le r} a_i a_j \langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k} \rangle = \sum_{1 \le i, j \le r} a_i a_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{r} a_j\varphi_j \right\rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  $$\langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$$

  Ainsi, $\langle \psi, \psi \rangle = \langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \varphi_{r+1}, \varphi_{r+1} \rangle$ et :

  $$\langle \psi - \varphi_{r+k+1}, \psi - \varphi_{r+k+1} \rangle = \langle \psi, \psi \rangle - 2\langle \psi, \varphi_{r+k+1} \rangle + \langle \varphi_{r+k+1}, \varphi_{r+k+1} \rangle = 0.$$

  Ceci prouve que $\psi - \varphi_{r+k+1} = 0$, donc que :

  $$\varphi_{r+k+1} = \psi = a_1\varphi_{1+k} + \dots + a_r\varphi_{r+k}.$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $\varphi_{i+k} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, donc :

  $$\varphi_{r+k+1} = \sum_{i=1}^{r} a_i\varphi_{i+k} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r).}$$