Corrigés des TD du chapitre 16

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_i \alpha_k \alpha_k \alpha_j\right) = \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) = \alpha_i \alpha_j = a_{i,j}.$$

Donc, $A^2 = A$ et A est une matrice de projecteur.

De plus, si on pose $e_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \varepsilon_k = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k = \alpha_j e_1.$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, les α_j ne sont pas tous nuls (et $e_1 \neq 0$), donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1).$$

Par le théorème du rang, on a $\dim \ker f = n - rg(f) = n - 1$.

Soit $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_p \neq 0$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$f(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = \alpha_p f(\varepsilon_j) - \alpha_j f(\varepsilon_p) = \alpha_1 \alpha_j e_p - \alpha_j \alpha_1 e_p = 0.$$

Donc, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \in \ker f$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on a :

$$\sum_{j=1, j \neq p}^{n} \lambda_j (\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1, j \neq p}^{n} \alpha_p \lambda_j \varepsilon_j - \left(\sum_{j=1, j \neq p}^{n} \lambda_j \alpha_j\right) \varepsilon_p = 0.$$

Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre, ceci donne $\alpha_p \lambda_j = 0$, soit $\lambda_j = 0$ (car $\alpha_p \neq 0$) pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$.

Ainsi, la famille $\left(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p\right)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{p\}}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\ker f$, qui est de dimension $n-1$, donc $\left(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p\right)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{p\}}$ est une base de $\ker f$.

Enfin, pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$, on a :

$$(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p (\varepsilon_j \mid e_1) - \alpha_j (\varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p \alpha_j - \alpha_j \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \perp e_1$, ce qui prouve que :

$$\ker f \perp \operatorname{Im} f.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme canoniquement associé à } A \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Vect}(\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n).}$$

Exercice 2

1) L'application $(f,g)\mapsto(f\mid g)$ est clairement symétrique et bilinéaire (du fait de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale). De plus, pour tout $f\in E$, on a $(f\mid f)=\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_0^1 f'(t)^2\,dt\geq 0$ et, comme $\int_0^1 f(t)^2\,dt\geq 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2\,dt\geq 0$, on a :

$$(f\mid f)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt=\int_0^1 f'(t)^2\,dt=0.$$

Or, f^2 est positive et continue sur $[0;1]$, donc :

$$\int_0^1 f(t)^2\,dt=0 \quad\Leftrightarrow\quad f^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad f=0.$$

Ainsi, $(f\mid f)=0$ si et seulement si $f=0$, et finalement, $(f,g)\mapsto(f\mid g)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur *E*, donc :

$\boxed{(f,g)\mapsto(f\mid g) \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$

2) Remarquons que *W* est l'espace vectorielle des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $y''-y=0$.

Si on note $f_1:[0;1]\to\mathbb{R}\,;t\mapsto e^t$ et $f_2:[0;1]\to\mathbb{R}\,;t\mapsto e^{-t}$, on a $f_1,f_2\in E$ et ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions de $y''-y=0$, donc :

$$W=\operatorname{Vect}(f_1,f_2).$$

Ceci prouve entre autres que *W* est bien un sous-espace de *E*. On prouve facilement que *V* est non vide (il contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires, donc *V* est aussi un sous-espace de *E*.

Soit maintenant $f\in E$.

S'il existe $(f_V,f_W)\in V\times W$ tel que $f=f_V+f_W$, alors on a $f_W=af_1+bf_2$ avec :

$$\begin{cases} f(0)=f_V(0)+f_W(0)=f_W(0)=a+b \\ f(1)=f_V(1)+f_W(1)=f_W(1)=ae+\dfrac{b}{e} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a=\dfrac{f(0)-ef(1)}{1-e^2} \\ b=\dfrac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1} \end{cases}$$

Donc :

$$f_W=\frac{f(0)-ef(1)}{1-e^2}f_1+\frac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1}f_2 \text{ et } f_V=f-f_W.$$

Ainsi, si f_V et f_W, elles sont uniques.

Réciproquement, si on pose $f_W=\dfrac{f(0)-ef(1)}{1-e^2}f_1+\dfrac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1}f_2$ et $f_V=f-f_W$, on a immédiatement :

$$f=f_V+f_W \text{ et } f_W\in W.$$

On montre facilement que $f_V(0)=f(0)-f_W(0)=0$ et $f_V(1)=f(1)-f_W(1)=0$, donc que $f_V\in V$.

Ceci prouve par analyse-synthèse que :

$$\underline{E=V\oplus W}.$$

Pour montrer que $V\perp W$, il suffit de prouver que f_1 et f_2 sont orthogonales à toute fonction de *V*.

Soit $f\in V$. On a $f(0)=f(1)=0$ et :

$$\left(f\mid f_1\right)=\int_0^1 f(t)e^t dt+\int_0^1 f'(t)e^t dt=\int_0^1\left[f(t)e^t+f'(t)e^t\right]dt=\left[f(t)e^t\right]_0^1=f(1)e-f(0)=0$$

$$\left(f\mid f_2\right)=\int_0^1 f(t)e^{-t} dt+\int_0^1 f'(t)(-e^{-t})dt=-\int_0^1\left[-f(t)e^{-t}+f'(t)e^{-t}\right]dt=-\left[f(t)e^{-t}\right]_0^1=-\frac{f(1)}{e}+f(0)=0$$

Donc, pour tout $f\in V$, on a $f\perp f_1$ et $f\perp f_2$, et ainsi :

$$\underline{V\perp W}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{E=V\overset{\perp}{\oplus}W}$$

4) Pour toute $f\in E_{\alpha,\beta}$, on a $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$. Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$f=f_V+f_W$$

avec $f_V\in V$ et $f_W=\dfrac{\alpha-e\beta}{1-e^2}f_1+\dfrac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}f_2\in W$.

Alors, avec $f_V\perp f_W$, on a $\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt=\|f\|^2=\|f_V\|^2+\|f_W\|^2$ et :

$$\|f_W\|^2=\left\|\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}f_1+\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}f_2\right\|^2=\left(\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\right)^2\|f_1\|^2+2\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}\left(f_1\mid f_2\right)+\left(\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}\right)^2\|f_2\|^2.$$

On a :

$$\|f_1\|^2=\int_0^1\left[f_1(t)^2+f_1'(t)^2\right]dt=\int_0^1 2e^{2t}dt=e^2-1$$

$$\left(f_1\mid f_2\right)=\int_0^1 f_1(t)f_2(t)dt+\int_0^1 f_1'(t)f_2'(t)dt=\int_0^1 e^te^{-t}dt+\int_0^1 e^t(-e^{-t})dt=0$$

$$\|f_2\|^2=\int_0^1\left[f_2(t)^2+f_2'(t)^2\right]dt=\int_0^1 2e^{-2t}dt=-e^{-2}+1=\frac{e^2-1}{e^2}$$

Donc :

$$\|f_W\|^2=\left(\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\right)^2\left(e^2-1\right)+\left(\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}\right)^2\frac{e^2-1}{e^2}=\frac{(\alpha-e\beta)^2+(e\alpha-\beta)^2}{e^2-1}=\frac{(e^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-4e\alpha\beta}{e^2-1}.$$

Enfin :

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt\right)=\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\|f\|^2\right)=\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\|f_V\|^2+\|f_W\|^2\right)=\|f_W\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt\right)=\frac{(e^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-4e\alpha\beta}{e^2-1}}$$

Exercice 3

Soient $\mathcal{B}_F=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{B}_G=(e_{p+1},\dots,e_n)$ des bases orthonormées de F et G respectivement (avec $n=\dim E$, $p=\dim F$ et $n-p=\dim G$). La famille $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est alors une base de E adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.

On a alors $M_{\mathcal{B}}(s)=diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ où le 1 apparait p fois et :

$$s(e_k)=\begin{cases} e_k & \text{si } 1\le k\le p \\ -e_k & \text{si } p+1\le k\le n\end{cases}$$

On a alors :

- pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j}$ (car $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i,j)\in[\![p+1,n]\!]^2$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(-e_i\,|-e_j)=(e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j}$ (car $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!]$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(e_i\,|-e_j)=-(e_i\,|\,e_j)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} G=F^{\perp} &\iff G\perp F \\ &\iff \mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n) \text{ est orthonormée} \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=0 \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=-(e_i\,|\,e_j) \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big) \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (e_i\,|\,e_j)=\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)\end{aligned}$$

Ceci prouve que (i) équivaut à (ii).

De plus, comme $M_{\mathcal{B}}(s)=diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ est diagonale donc symétrique, *s* est un endomorphisme symétrique si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc (iii) est équivalente à (i) et (ii) et ainsi :

$$\boxed{\text{Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.}}$$

Exercice 4

Notons $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) et $\mathcal{B}'=(c_1,\dots,c_n)$ où les c_k sont les vecteurs colonnes de *A*. Comme $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}'$ est une base et on a $A=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $\mathcal{B}''=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de *E* telle que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\text{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\text{Vect}(c_1,\dots,c_k)$. Ceci se traduit par pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$c_k\in \text{Vect}(e_1,\dots,e_k) \ \Rightarrow\ c_k=\lambda_{1,k}e_1+\dots+\lambda_{k,k}e_k.$$

Alors $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_{n-2,n-1} & \lambda_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n,n}\end{pmatrix}$, donc $R=P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée. Comme la base $\mathcal{B}''$ l'est aussi, $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est orthogonale.

Enfin, la relation de Chasles donne $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, soit, avec $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$:

$$\boxed{A = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure.}}$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $O(n)$ est convexe si et seulement si pour toutes $A, B \in O(n)$ et tout $t \in [0,1]$, $tA + (1-t)B \in O(n)$.

En particulier pour $t = \dfrac{1}{2}$, on a pour toutes $A, B \in O(n)$, $\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B \in O(n)$.

Or, si on prend $A = I_n \in O(n)$ et $B = -I_n \in O(n)$, on a $\dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}B = 0_n \notin O(n)$. Ainsi :

$$\boxed{O(n) \text{ n'est pas convexe.}}$$

Exercice 6

Comme la matrice A est symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique). Donc, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $D = {}^tPAP$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$ (donc $P \in O(n)$).

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $U_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u_k dans la base canonique. On a immédiatement ${}^tU_kU_k = \|u_k\|^2 = 1$ (en identifiant une matrice 1×1 et son coefficient).

De plus, si on note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}.$$

Donc :

$$A = PD\,{}^tP = P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_{k,k}\right){}^tP = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k PE_{k,k}\,{}^tP.$$

Enfin, si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $U_k = \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{n,k} \end{pmatrix}$, on a $P = \left(u_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ et :

$$PE_{k,k}\,{}^tP = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,k} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{k,1} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{k,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,1} & \cdots & u_{n,k} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{k,1} & \cdots & u_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{1,k} & \cdots & u_{k,k} & \cdots & u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1,n} & \cdots & u_{k,n} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,k}u_{1,k} & \cdots & u_{1,k}u_{k,k} & \cdots & u_{1,k}u_{n,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ u_{k,k}u_{1,k} & \cdots & u_{k,k}u_{k,k} & \cdots & u_{k,k}u_{n,k} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n,k}u_{1,k} & \cdots & u_{n,k}u_{k,k} & \cdots & u_{n,k}u_{n,k} \end{pmatrix} = U_k\,{}^tU_k.$$

Donc, on a bien $A=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_k\,{}^tU_k$ et ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe bien } (\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n \text{ et } (U_1,U_2,\dots,U_n)\in\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n \\ \text{tels que pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ {}^tU_kU_k=1 \text{ et } A=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k U_k\,{}^tU_k .\end{array}}$$

Exercice 7

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1) Comme la matrice A est symétrique réelle $A\in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Donc, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=(U_1,U_2,\dots,U_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $D={}^tPAP$ où $D=diag\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ et P est la matrice de passage de la base canonique (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$ (donc $P\in O(n)$). On a alors pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X=\sum_{k=1}^{n}x_ku_k$, $AX=\sum_{k=1}^{n}x_kAu_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\lambda_ku_k$ et :

$${}^tXAX=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2 .$$

Remarquons que $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

a. Si A est positive, alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, ${}^tU_kAU_k=\lambda_k\geq 0$.

Réciproquement, si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_k\geq 0$, alors pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2\geq 0$.

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs.}}$$

b. Si A est positive, alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, ${}^tU_kAU_k=\lambda_k>0$ car $U_k\neq 0$.

Réciproquement, si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_k>0$, alors pour tout $X={}^t(x_1\ \ x_2\ \ \dots\ \ x_n)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X\neq 0$, il existe $p\in[\![1,n]\!]$ tel que $x_p\neq 0$ (donc $x_p^2>0$) et ${}^tXAX=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2\geq\lambda_px_p^2>0$.

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ est définie, positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.}}$$

2) Soit $X={}^t(x_1\ \ x_2\ \ \dots\ \ x_n)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$${}^tXHX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_ix_j}{i+j-1} .$$

Si on pose $f(t)=\sum_{i=1}^{n}x_it^{i-1}$, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$f(t)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_it^{i-1}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_it^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_jt^{j-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_jt^{i+j-2} .$$

Comme f est une fonction polynômiale, f^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_0^1 f(t)^2\,dt = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(x_i x_j\left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1}\right]_0^1\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = {}^tXHX\ .$$

Ainsi, comme f^2 est continue et positive sur $[0,1]$, on a ${}^tXHX = \int_0^1 f(t)^2\,dt \geq 0$ avec :

$${}^tXHX = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, t\in[0,1],\ f(t)=0\,.$$

Ceci veut dire que f est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle est polynômiale et admet une infinité de racines), et donc que tous ses coefficients sont nuls, soit pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i = 0$ et donc $X = 0$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{H \text{ est définie positive.}}$$

3) a. On a $S = {}^tAA$, donc :

$${}^tS = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA = S\ .$$

Donc, S est symétrique.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tXSX = {}^tX({}^tAA)X = ({}^tX\,{}^tA)(AX) = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0\,.$$

Donc, S est positive et ainsi :

$$\boxed{S \text{ est une matrice symétrique positive.}}$$

b. Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = diag\,(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ avec $\lambda_k\in\mathbb{R}_+$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ et $P\in O(n)$ telles que $S = {}^tPDP$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = diag\,(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\ldots,\sqrt{\lambda_n})\,.$$

On a $D = \Delta^2$ et ${}^t\Delta = \Delta$ (car Δ est diagonale), donc :

$$S = {}^tPDP = {}^tP\Delta^2P = {}^tP\,{}^t\Delta\Delta P = {}^t(\Delta P)(\Delta P) = {}^tAA \ \text{ avec }\ A = \Delta P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } S \text{ est une matrice symétrique positive, alors il existe } A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } S = {}^tAA.}$$

Comme ${}^t(-A)(-A) = {}^tAA$:

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas unique.}}$$

c. Nous revenons ici à $S = {}^tAA$. On a vu que pour tout $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = \|AX\|^2$, donc :

$${}^tXSX = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \|AX\| = 0 \quad\Leftrightarrow\quad AX = 0 \quad\Leftrightarrow\quad X\in\ker A\,.$$

Alors :

$$S \text{ est définie positive} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ {}^tXSX = 0 \;\Leftrightarrow\; X = 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X \in \ker A \;\Leftrightarrow\; X = 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \ker A = \{0\}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{S \text{ est définie positive si et seulement si } A \text{ est inversible.}}$$

d. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a d'une part :

$$X \in \ker S \quad \Leftrightarrow \quad SX = 0 \quad \Rightarrow \quad {}^tXSX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \ker A .$$

Donc $\ker S \subset \ker A$.

Et d'autre part :

$$X \in \ker A \quad \Leftrightarrow \quad AX = 0 \quad \Rightarrow \quad SX = {}^tAAX = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \in \ker S .$$

Donc $\ker A \subset \ker S$.

Ainsi, $\ker A = \ker S$, donc, avec le théorème du rang, on obtient :

$$rg\,(A) = n - \dim\big(\ker A\big) = n - \dim\big(\ker S\big) = rg\,(S).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{rg\,(A) = rg\,(S)}$$

4) Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $P \in O(n)$ telles que $S = {}^tPDP$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = diag\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a alors $D = \Delta^2$ et, avec $P\,{}^tP = I_n$:

$$S = {}^tPDP = {}^tP\Delta^2P = {}^tP\Delta\Delta P = {}^tP\Delta(P\,{}^tP)\Delta P = ({}^tP\Delta P)({}^tP\Delta P) = R^2 .$$

avec $R = {}^tP\Delta P$. Comme $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs et $P \in O(n)$, R est bien une matrice symétrique positive.

Ainsi, il existe bien une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$. Reste à prouver l'unicité.

Soit M une matrice symétrique positive telle que $M^2 = S$.

Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes deux à deux (toutes positives, car M est positive) et $E_1, \dots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Pour tout $X \in E_k$, on a $MX = \mu_k X$, donc :

$$SX = M^2X = M\,(MX) = M\,(\mu_k X) = \mu_k MX = \mu_k\,(\mu_k X) = \mu_k^2 X .$$

Ainsi, μ_k^2 est une valeur propre de S et $E_k \subset F_k$, où F_k est sous-espace propre associé à μ_k^2.

Remarquons que comme les μ_k sont positives, on a : $\mu_k^2 = \mu_{k'}^2 \;\Leftrightarrow\; \mu_k = \mu_{k'} \;\Leftrightarrow\; k = k'$.

On a alors $\dim E_k \leq \dim F_k$, donc :

$$n = \dim E_1 + ... + \dim E_p \leq \dim F_1 + ... + \dim F_p \leq n .$$

Ainsi, $\dim F_1 + ... + \dim F_p = n$ et, comme pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\dim E_k \leq \dim F_k$, ceci implique que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim E_k = \dim F_k$.

Finalement, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $E_k \subset F_k$ et $\dim E_k = \dim F_k$, donc les sous-espaces propres de *M* et *S* sont les mêmes et les valeurs propres de *S* sont $\mu_1^2, ..., \mu_p^2$.

Or, la matrice connue est *S*, donc ce qui précède se reformule en : les valeurs propres de *M* sont $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_p}$ où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes deux à deux (et positives) de *S* et le sous-espace propre de *M* associé à $\sqrt{\lambda_k}$ est le sous-espace propre de *S* associé à λ_k.

Ainsi, les valeurs propres et sous-espaces propres de *M* sont fixés, ce qui détermine complètement la matrice *M* et donc *R* est unique.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe une et une seule matrice } R \text{ symétrique positive telle que } R^2 = S.}$$

Remarquons que si on omet le caractère positif, il existe plusieurs matrices dont le carré est S.

5) Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres positives de *A*.

Pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad X + AX = X + \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad (I_n + A)X = (1+\lambda)X .$$

Donc, les valeurs propres de $I_n + A$ sont $1+\lambda_1, 1+\lambda_2, ..., 1+\lambda_n$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la valeur propre $1+\lambda_k$ de $I_n + A$, $1+\lambda_k$ est de même multiplicité que la valeur propre λ_k de *A*. Ainsi :

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n) .$$

On veut donc prouver que si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont *n* réels positifs (distincts ou pas), on a :

$$1 + \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n} \leq \sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n)} .$$

Précédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$, soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$. On a alors $1 + \sqrt[1]{\lambda_1} = 1 + \lambda_1 = \sqrt[1]{1+\lambda_1}$, donc la relation est vérifiée.

- Supposons l'inégalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

  Posons $a = \sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n}$ et $b = \sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n)}$. Par hypothèse de récurrence, on a $1 + a \leq b$.

  Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n)(1+t)} - \sqrt[n+1]{\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n t} - 1 = b^{\frac{n}{n+1}}(1+t)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}} - 1 .$$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que différence de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \frac{1}{n+1} b^{\frac{n}{n+1}} (1+t)^{\frac{1}{n+1}-1} - \frac{1}{n+1} a^{\frac{n}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}-1} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{b}{1+t}\right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right].$$

On a donc :

$$f(t) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{1+t}\right)^{\frac{n}{n+1}} \geq \left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{n}{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{1+t} \geq \frac{a}{t} \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)t \geq a.$$

Et comme $1+a \leq b$, on a $b-a \geq 1 > 0$, donc $f(t) \geq 0$ quand $t \geq \frac{a}{b-a} \geq 0$.

Ceci prouve que *f* est décroissante sur $\left[0, \frac{a}{b-a}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{a}{b-a}, +\infty\right[$ et donc que *f* admet un minimum en $\frac{a}{b-a}$. Enfin, on a :

$$f\left(\frac{a}{b-a}\right) = b^{\frac{n}{n+1}}\left(1+\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1$$

$$= b^{\frac{n}{n+1}} \frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - a^{\frac{n}{n+1}} \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = \frac{b-a}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = (b-a)^{\frac{n}{n+1}} - 1$$

Or, on a vu que $b-a \geq 1$, donc $(b-a)^{\frac{n}{n+1}} \geq 1$ et $f\left(\frac{a}{b-a}\right) \geq 0$.

Ainsi, le minimum de *f* sur $\mathbb{R}_+$ est positif, donc *f* est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda_{n+1}) \geq 0$.

Finalement, on obtient pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$:

$$f(\lambda_{n+1}) = \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)(1+\lambda_{n+1})} - \sqrt[n+1]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\lambda_{n+1}} - 1 \geq 0.$$

Soit :

$$1 + \sqrt[n+1]{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\lambda_{n+1}} \leq \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\ldots(1+\lambda_n)(1+\lambda_{n+1})}.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que l'on a bien :

$$\boxed{1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}}$$

Exercice 8

1) On a ${}^t({}^tMM) = {}^tM\,{}^t({}^tM) = {}^tMM$, donc la matrice ${}^tMM$ est symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, ${}^tMM$ est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP\,{}^tMMP = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ où les μ_k sont les valeurs propres de ${}^tMM$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à μ_k. On a ${}^tMMX = \mu_k X$ avec $X \neq 0$.

En munissant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique, on a :

$$\|MX\|^2 = {}^tX\,{}^tMMX = \mu\,{}^tXX = \mu_k\|X\|^2.$$

Comme $X \neq 0$, on a $\|X\| \neq 0$. Alors, $\mu_k = \dfrac{\|MX\|^2}{\|X\|^2} \geq 0$ et, comme M est inversible, $\mu_k \neq 0$, donc $\mu_k > 0$.

On peut alors écrire $\mu_k = \lambda_k^2$, avec $\lambda_k > 0$ et ${}^tP\,{}^tMMP = diag\left(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\right) = D^2$ où $D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe } P \in O_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } {}^tP\,{}^tMMP = D^2 \text{ où } D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) \text{ avec } \lambda_k > 0 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].}$$

2) Montrer que Q est une matrice orthogonale revient à montrer que ses colonnes forment une famille orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$${}^t\left(\frac{1}{\lambda_i}V_i\right)\left(\frac{1}{\lambda_j}V_j\right) = \delta_{i,j}.$$

Soit donc $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a :

$${}^t\left(\frac{1}{\lambda_i}V_i\right)\left(\frac{1}{\lambda_j}V_j\right) = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\,{}^tV_iV_j.$$

Et comme $MP = \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{pmatrix}$, on a :

$${}^tP\,{}^tMMP = {}^t(MP)MP = \left({}^tV_iV_j\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}.$$

Or, ${}^tP\,{}^tMMP = diag\left(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2\right)$, donc :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \text{si } i \neq j,\ {}^tV_iV_j = 0 \\ \bullet \ \text{si } i = j,\ {}^tV_iV_j = {}^tV_iV_i = \lambda_i^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\,{}^tV_iV_j = \delta_{i,j}$$

Et ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } Q \text{ est orthogonale.}}$$

Notons $MP = \begin{pmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1}V_1 & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_n}V_n \end{pmatrix}$. On a alors $Q = (MP)\Delta$ avec $\Delta = diag\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$.

Comme $D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$, on a $\Delta = D^{-1}$, et donc $Q = (MP)D^{-1}$, soit :

$$MP = QD \quad \Rightarrow \quad MP\,{}^tP = M = QD\,{}^tP.$$

Ainsi, en posant $(A, B) = (Q, {}^tP) \in O_n(\mathbb{R})^2$

$$\boxed{\text{Il existe } A, B \in O_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = ADB \text{ où } D = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) \text{ avec } \lambda_k > 0 \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!].}$$

Exercice 9

1) Soit $f \in O(E)$ et F un sous-espace de E.

Comme $f \in O(E)$, f est bijective et, comme E est de dimension finie :

$$\dim f(F) = \dim F .$$

Si F est stable par f, soit $f(F) \subset F$, alors, avec l'égalité des dimensions ci-dessus, on a :

$$f(F) = F .$$

Soit alors $x \in F^{\perp}$.

D'après ce qui précède, pour tout $y \in F$, il existe $z \in F$, tel que $y = f(z)$ et :

$$\begin{aligned}\left(f(x) \mid y\right) &= \left(f(x) \mid f(z)\right) \\ &= \left(x \mid z\right) \quad \text{car } f \text{ est une ismétrie} \\ &= 0 \qquad\quad \text{car } x \in F^{\perp} \text{ et } z \in F\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in F^{\perp}$, on a $f(x) \in F^{\perp}$, ce qui prouve que :

$$F^{\perp} \text{ est stable par } f.$$

Réciproquement, si $F^{\perp}$ est stable par f, alors $(F^{\perp})^{\perp}$ est stable par f et comme on est en dimension finie, $(F^{\perp})^{\perp} = F$ et ainsi :

$$\boxed{F^{\perp} \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } F \text{ l'est.}}$$

2) Soit $f \in O(E)$.

Pour tout $(x, y) \in \ker\left(f - id_E\right) \times \mathrm{Im}\left(f - id_E\right)$, on a $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$. Alors :

$$\left(x \mid y\right) = \left(x \mid f(z) - z\right) = \left(x \mid f(z)\right) - \left(x \mid z\right) = \left(f(x) \mid f(z)\right) - \left(x \mid z\right).$$

Et comme $f \in O(E)$, on a $\left(f(x) \mid f(z)\right) = \left(x \mid z\right)$, donc $\left(x \mid y\right) = 0$.

Ainsi :

$$\mathrm{Im}\left(f - id_E\right) \perp \ker\left(f - id_E\right).$$

Ceci implique immédiatement que :

$$\mathrm{Im}\left(f - id_E\right) + \ker\left(f - id_E\right) = \mathrm{Im}\left(f - id_E\right) \overset{\perp}{\oplus} \ker\left(f - id_E\right) \subset E .$$

Et d'après le théorème du rang :

$$\dim\left[\mathrm{Im}\left(f - id_E\right) \oplus \ker\left(f - id_E\right)\right] = \dim\left[\mathrm{Im}\left(f - id_E\right)\right] + \dim\left[\ker\left(f - id_E\right)\right] = \dim E .$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\mathrm{Im}\left(f - id_E\right) \overset{\perp}{\oplus} \ker\left(f - id_E\right) = E}$$

3) Remarquons que :

- pour tout $f \in O(E)$, le résultat de la question précédente se reformule en :

$$\left(\mathrm{Im}\left(f - id_E\right)\right)^{\perp} = \ker\left(f - id_E\right)$$
$$\left(\ker\left(f - id_E\right)\right)^{\perp} = \mathrm{Im}\left(f - id_E\right)$$

- pour avoir une famille libre de p vecteurs, il faut que $p \leq n = \dim E$;

- pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application s_{u_k} est une réflexion, donc $s_{u_k} \in O(E)$. Comme $O(E)$ est stable par composition, on a $s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \in O(E)$. Ainsi, montrer que $\mathrm{Im}\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$ revient à montrer que $\ker\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \left(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)\right)^{\perp}$.

Procédons par récurrence finie sur $p \in [\![1, n]\!]$.

- Pour $p = 1$, soit u_1 un vecteur non nul de E (donc la famille (u_1) est libre). Comme s_{u_1} est la réflexion par rapport à l'hyperplan $(\mathbb{R}u_1)^{\perp}$, on a :

$$\ker\left(s_{u_1} - id_E\right) = (\mathbb{R}u_1)^{\perp} = \left(\mathrm{Vect}\,(u_1)\right)^{\perp}.$$

Donc, la propriété est vraie au rang $p = 1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $p \in [\![1, n-1]\!]$.

Soit $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})$ une famille libre de $p+1$ vecteurs de E.

Soit $x \in \left(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp}$. Pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$, $x \perp u_k$ donc $x \in (\mathbb{R}u_k)^{\perp}$ et $s_{u_k}(x) = x$. Alors :

$$s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p}\left(s_{u_{p+1}}(x)\right) = s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p}(x) = \ldots = s_{u_1}(x) = x.$$

Donc, $x \in \ker\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right)$ et ainsi :

$$\underline{\left(\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp} \subset \ker\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right)}.$$

Réciproquement, pour tout $x \in \ker\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right)$, on a :

$$s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = x \quad \Rightarrow \quad y = s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = x - s_{u_{p+1}}(x).$$

Alors, on a d'une part :

$$y = s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = \left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} - id_E\right)\left(s_{u_{p+1}}(x)\right) \in \mathrm{Im}\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} - id_E\right).$$

Et, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Im}\left(s_{u_1} \circ \ldots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p)$, donc :

$$y \in \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p).$$

D'autre part :

$$y = \left(s_{u_{p+1}} - id_E\right)(-x) \in \mathrm{Im}\left(s_{u_{p+1}} - id_E\right).$$

Et, d'après l'initialisation, $\mathrm{Im}\left(s_{u_{p+1}} - id_E\right) = \mathrm{Vect}\,(u_{p+1})$, donc :

$$y \in \mathrm{Vect}\,(u_{p+1}).$$

Ainsi, $y \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \bigcap \text{Vect}(u_{p+1})$ et, comme la famille $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})$ est libre, ceci donne $y = 0$.

Alors :

$$s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) - s_{u_{p+1}}(x) = x - s_{u_{p+1}}(x) = 0 \iff s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}}(x) = s_{u_{p+1}}(x) = x$$
$$\iff \begin{cases} s_{u_{p+1}}(x) = x \\ s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}(x) = s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}\left(s_{u_{p+1}}(x)\right) = x \end{cases}$$

Ainsi :

$$x \in \ker\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E\right) \bigcap \ker\left(s_{u_{p+1}} - id_E\right).$$

Or, par hypothèse de récurrence $\ker\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right)^{\perp}$, et d'après l'initialisation, $\ker\left(s_{u_{p+1}} - id_E\right) = \left(\text{Vect}(u_{p+1})\right)^{\perp}$, donc :

$$x \in \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right)^{\perp} \bigcap \left(\text{Vect}(u_{p+1})\right)^{\perp}.$$

Or, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right)^{\perp} \bigcap \left(\text{Vect}(u_{p+1})\right)^{\perp} &\iff x \in \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)\right)^{\perp} \text{ et } x \in \left(\text{Vect}(u_{p+1})\right)^{\perp} \\ &\iff \left(\forall k \in [\![1, p]\!],\ x \perp u_k\right) \text{ et } \left(x \perp u_{p+1}\right) \\ &\iff \forall k \in [\![1, p+1]\!],\ x \perp u_k \\ &\iff x \in \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp} \end{aligned}$$

Finalement, $x \in \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp}$ et ceci, pour tout $x \in \ker\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right)$, donc :

$$\underline{\ker\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right) \subset \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp}.}$$

En définitive, on a bien $\ker\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} \circ s_{u_{p+1}} - id_E\right) = \left(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p, u_{p+1})\right)^{\perp}$: la propriété est donc vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, soit :

$$\boxed{\text{Im}\left(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E\right) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)}$$