Corrigés des TD du chapitre 17

Exercice 1

1) Les deux colonnes de A sont orthogonales quel que soit a, donc A est orthogonale si et seulement si ses deux colonnes sont de norme 1, soit :

$$(a^2-1)^2+a^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad a^4-a^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1 \text{ ou } 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{A\in O(2) \text{ pour } a\in\{-1,0,1\}.}$$

2) Pour $a=0$, on a $A=-I_2$ qui est la matrice de la rotation d'angle π.

Pour $a=1$, on a $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Pour $a=-1$, on a $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Considérons $\vec{u}\,'$ un vecteur unitaire du plan orienté $\mathbb{R}^2$, directement orthogonal à $\vec{u}$.

La famille $(\vec{u},\vec{u}\,')$ est alors une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Si α est l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{v}=\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,'.$$

En posant $s=p+q-2p\circ q$, on a :

$$\begin{aligned}
s(\vec{u}) &= p(\vec{u})+q(\vec{u})-2p\big(q(\vec{u})\big)=\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}-2p(\cos\alpha\,\vec{v})=\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}-2\cos\alpha\, p(\vec{v})\\
&=(1-2\cos^2\alpha)\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{v}=(1-2\cos^2\alpha)\vec{u}+\cos^2\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{u}\,'=\sin^2\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\sin\alpha\,\vec{u}\,'\\
&=\sin\alpha\,(\sin\alpha\,\vec{u}+\cos\alpha\,\vec{u}\,')\\
s(\vec{u}\,') &= p(\vec{u}\,')+q(\vec{u}\,')-2p\big(q(\vec{u}\,')\big)=\sin\alpha\,\vec{v}-2p(\sin\alpha\,\vec{v})=\sin\alpha\,\vec{v}-2\sin\alpha\, p(\vec{v})\\
&=\sin\alpha\,\vec{v}-2\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{u}=\sin\alpha\,(\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,'-2\cos\alpha\,\vec{u})\\
&=\sin\alpha\,(-\cos\alpha\,\vec{u}+\sin\alpha\,\vec{u}\,')
\end{aligned}$$

La matrice de s dans la base orthonormée $(\vec{u},\vec{u}\,')$ est alors :

$$A=\sin\alpha\begin{pmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{pmatrix}=\big(\sin\alpha\, I_2\big)\begin{pmatrix}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) & \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{s=p+q-2p\circ q \text{ est la composée de la rotation d'angle } \dfrac{\pi}{2}-\alpha \text{ et de l'homothétie de rapport } \sin\alpha.}$$

Exercice 3

1) On a $|Tr(A)| = |a+d| < 2$ et $\det A = ad - bc = 1$.

Si $bc = 0$, alors $ad = 1$ et en posant $s = a+d$, on a $\begin{cases} a+d = s \\ ad = 1 \end{cases}$, donc a et d sont les racines (réelles) de $X^2 - sX + 1$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = s^2 - 4$ et comme $|s| = |a+d| < 2$, on a $s^2 < 4$ et $\Delta < 0$. Ainsi, $X^2 - sX + 1$ n'admet pas de racine réelle, ce qui est absurde car a et d sont racines réelles du trinôme.

Ainsi :

$$\boxed{bc \neq 0}$$

2) Remarquons déjà que si A est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base $\mathcal{B}$, alors elle l'est dans toute base obtenue par rotation de $\mathcal{B}$ (d'un angle quelconque). Ainsi, pour trouver une éventuelle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle A est la matrice d'une rotation, on peut choisir le premier vecteur.

Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, avec $e_1 = (1,0)$, une éventuelle base dans laquelle A est la matrice d'une rotation r, d'angle θ.

On a alors $A = M_{\mathcal{B}}(r)$ et dans une base orthonormée $\mathcal{B}_o$, on a $M_{\mathcal{B}_o}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Comme la trace est invariante par changement de base, on a :

$$Tr\left(M_{\mathcal{B}_o}(r)\right) = Tr(A) = 2\cos\theta = a+d\,.$$

Comme $|Tr(A)| = |a+d| < 2$, on a $-1 < \dfrac{a+d}{2} < 1$, il existe un unique $\theta \in \,]0,\pi[$ tel que $\cos\theta = \dfrac{a+d}{2}$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on a :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|e_1\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|e_2\|^2 \\ (e_1 \mid r(e_1)) = \|e_1\|.\|r(e_1)\|.\cos\theta = \|e_1\|^2 \dfrac{a+d}{2} \\ (e_2 \mid r(e_2)) = \|e_2\|.\|r(e_2)\|.\cos\theta = \|e_2\|^2 \dfrac{a+d}{2} \end{cases}$$

Or, $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|ae_1 + ce_2\|^2 = a^2\|e_1\|^2 + 2ac\left(e_1 \mid e_2\right) + c^2\|e_2\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|be_1 + de_2\|^2 = b^2\|e_1\|^2 + 2bd\left(e_1 \mid e_2\right) + d^2\|e_2\|^2 \\ (e_1 \mid r(e_1)) = \left(e_1 \mid ae_1 + ce_2\right) = a\left(e_1 \mid e_1\right) + c\left(e_1 \mid e_2\right) = a\|e_1\|^2 + c\left(e_1 \mid e_2\right) \\ (e_2 \mid r(e_2)) = \left(e_2 \mid be_1 + de_2\right) = b\left(e_1 \mid e_2\right) + d\left(e_2 \mid e_2\right) = b\left(e_1 \mid e_2\right) + d\|e_2\|^2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(S):\begin{cases} a^2\|e_1\|^2+2ac(e_1\mid e_2)+c^2\|e_2\|^2=\|e_1\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+2bd(e_1\mid e_2)+d^2\|e_2\|^2=\|e_2\|^2 \\ a\|e_1\|^2+c(e_1\mid e_2)=\|e_1\|^2\dfrac{a+d}{2} \\ b(e_1\mid e_2)+d\|e_2\|^2=\|e_2\|^2\dfrac{a+d}{2} \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire :

$$\begin{cases} c(e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2} \\ b(e_1\mid e_2)=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2} \end{cases}$$

Soit, avec $bc\neq 0$, donc $b\neq 0$ et $c\neq 0$:

$$(e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\frac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\frac{a-d}{2b}.$$

Si ces deux égalités sont vérifiées, on a :

$$\begin{cases} a^2\|e_1\|^2+2ac(e_1\mid e_2)+c^2\|e_2\|^2=ad\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+2bd(e_1\mid e_2)+d^2\|e_2\|^2=b^2\|e_1\|^2+ad\|e_2\|^2 \end{cases}$$

Donc :

$$(S)\iff\begin{cases} ad\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=\|e_1\|^2 \\ b^2\|e_1\|^2+ad\|e_2\|^2=\|e_2\|^2 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}\iff\begin{cases} (ad-1)\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=0 \\ b^2\|e_1\|^2+(ad-1)\|e_2\|^2=0 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}$$

Avec $\det A=ad-bc=1$, on obtient $ad-1=bc$, donc :

$$(S)\iff\begin{cases} bc\|e_1\|^2+c^2\|e_2\|^2=0 \\ b^2\|e_1\|^2+bc\|e_2\|^2=0 \\ (e_1\mid e_2)=-\|e_1\|^2\dfrac{a-d}{2c}=\|e_2\|^2\dfrac{a-d}{2b} \end{cases}\iff\begin{cases} \|e_2\|^2=-\dfrac{b}{c}\|e_1\|^2 \\ (e_1\mid e_2)=-\dfrac{d-a}{2c}\|e_1\|^2 \end{cases}$$

Alors, si $e_1=(1,0)$ et $e_2=(\alpha,\beta)$, on a $\|e_1\|=1$ et :

$$(S)\iff\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{c} \\ \alpha=-\dfrac{d-a}{2c} \end{cases}\iff\begin{cases} \alpha=-\dfrac{d-a}{2c} \\ \beta^2=-\dfrac{b}{c}-\left(\dfrac{d-a}{2c}\right)^2 \end{cases}$$

Enfin :

$$-\frac{b}{c}-\left(\frac{d-a}{2c}\right)^2=-\frac{4bc+(d-a)^2}{4c^2}=-\frac{4(ad-1)+a^2-2ad+d^2}{4c^2}=\frac{4-(a+d)^2}{4c^2}=\frac{4-4\cos^2\theta}{4c^2}=\left(\frac{\sin\theta}{c}\right)^2.$$

On peut donc prendre $e_2=\left(\dfrac{a-d}{2c},\dfrac{\sin\theta}{c}\right)$.

Réciproquement, si on note r la rotation d'angle $\theta \in]0,\pi[$ tel que $\cos\theta = \dfrac{a+d}{2}$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = \left(\dfrac{a-d}{2c}, \dfrac{\sin\theta}{c}\right)$, on vérifie aisément que :

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base (car $\theta \in]0,\pi[$, donc $\sin\theta \neq 0$) ;
- $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc $A = M_{\mathcal{B}}(r)$.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est bien la matrice d'une rotation vectorielle dans une base bien choisie.}}$$

Exercice 4

1) Remarquons déjà que si l'un des vecteurs est nul, alors la relation est vraie car les deux membres valent 0.

On suppose que les quatre vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ne sont pas nuls.

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors on peut écrire $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $\vec{a} \neq \vec{0}$) et :

- d'une part : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, donc $(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = 0$;
- d'autre part : $\begin{pmatrix} \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{d} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} \end{pmatrix}$, donc $\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi, l'égalité est vraie aussi.

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, quitte à diviser les deux côtés de l'égalité par $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$ (non nulles), on peut supposer que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont unitaires. Notons $\vec{b}_1$ le vecteur unitaire du plan $\mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$ tel que $(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ soit une base orthonormée de E. On a $\vec{b}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ dans cette base et :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\cos\alpha\,\vec{a} + \sin\alpha\,\vec{b}_1) = (\sin\alpha)\,\vec{a} \wedge \vec{b}_1 .$$

Si $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ et $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ dans cette base, alors la 3$^{\text{ème}}$ composante de $\vec{c} \wedge \vec{d}$ dans $(\vec{a},\vec{b}_1,\vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ est $c_1d_2 - d_1c_2$, donc :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin\alpha\,(\vec{a} \wedge \vec{b}_1).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin\alpha\,(c_1d_2 - d_1c_2) .$$

Par ailleurs :

$$\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & (\cos\alpha\,\vec{a} + \sin\alpha\,\vec{b}_1).\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & (\cos\alpha\,\vec{a} + \sin\alpha\,\vec{b}_1).\vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \cos\alpha\,\vec{a}.\vec{c} + \sin\alpha\,\vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \cos\alpha\,\vec{a}.\vec{d} + \sin\alpha\,\vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \sin\alpha\,\vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \sin\alpha\,\vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix} = \sin\alpha \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}_1.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}_1.\vec{d} \end{vmatrix} = \sin\alpha \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \sin\alpha\,(c_1d_2 - d_1c_2) = (\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d})$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b}).(\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{a}.\vec{d} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}}$$

2) Ici encore, si $\vec{a}$ est nul, la relation est vérifiée (les deux membres valent $\vec{0}$).

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires, alors $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{0}\wedge\vec{c}=\vec{0}$ et on peut écrire $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ (car $\vec{a}\neq\vec{0}$). D'où :

$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}=(\vec{a}.\vec{c})\lambda\vec{a}-(\lambda\vec{a}.\vec{c})\vec{a}=\lambda\left[(\vec{a}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{a}\right]=\vec{0}=(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\ .$$

Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, alors $\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right)\perp\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$, donc $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\in\mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$ et :

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}\ .$$

D'après la première question, on a :

$$\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right).\vec{a}=\left[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]=\left[\vec{c},\vec{a},\vec{a}\wedge\vec{b}\right]=(\vec{c}\wedge\vec{a}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c}\\ \vec{a}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{a}\end{vmatrix}=\Delta_1\ .$$

$$\left((\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}\right).\vec{b}=\left[\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c},\vec{b}\right]=\left[\vec{c},\vec{b},\vec{a}\wedge\vec{b}\right]=(\vec{c}\wedge\vec{b}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{c}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}=\Delta_2\ .$$

Avec $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, on obtient le système :

$$\begin{cases}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}).\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\lambda+(\vec{a}.\vec{b})\mu=\Delta_1\\ (\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}).\vec{b}=(\vec{a}.\vec{b})\lambda+(\vec{b}.\vec{b})\mu=\Delta_2\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{pmatrix}$$

Et, à nouveau avec la première question, on a $\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}=(\vec{a}\wedge\vec{b}).(\vec{a}\wedge\vec{b})=\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|^2\neq 0$, car $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires, donc le système est de Cramer et :

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{\Delta_1(\vec{b}.\vec{b})-\Delta_2(\vec{a}.\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})}=\dfrac{-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{b})+(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})(\vec{b}.\vec{c})}{(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})}=-(\vec{b}.\vec{c})\\ \mu=\dfrac{\Delta_1(\vec{a}.\vec{b})-\Delta_2(\vec{a}.\vec{a})}{(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})}=\dfrac{(\vec{a}.\vec{c})(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{b})}{(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}.\vec{b})-(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b})}=(\vec{a}.\vec{c})\end{cases}$$

Ainsi, on obtient bien dans tous les cas :

$$\boxed{(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}}$$

3) On cherche les vecteurs $\vec{u}$ de E tels que $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}$, avec $\vec{a}$ et $\vec{b}$ donnés.

Pour tout $\vec{u}\in E$, on a $(\vec{a}\wedge\vec{u})\perp\vec{a}$, donc si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas orthogonaux, l'équation n'a pas de solution.

On suppose désormais que $\vec{a}\perp\vec{b}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $\vec{u}\in E$, $(\vec{a}\wedge\vec{u})\wedge\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}$, donc :

$$\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}\quad\Rightarrow\quad(\vec{a}\wedge\vec{u})\wedge\vec{a}=(\vec{a}.\vec{a})\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}=\vec{b}\wedge\vec{a}\quad\Rightarrow\quad\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\left[(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}-\vec{a}\wedge\vec{b}\right].$$

Soit :

$$\vec{u}=\lambda\,\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b}\ \text{ avec }\ \lambda=\frac{(\vec{u}.\vec{a})}{\|\vec{a}\|^2}\in\mathbb{R}\ .$$

Réciproquement, si $\vec{u}=\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, on a (avec $\vec{a}\perp\vec{b}$, donc $\vec{b}.\vec{a}=0$) :

$$\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{a}\wedge\left(\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}\wedge\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})=\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{a}=\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\left[(\vec{a}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{b}.\vec{a})\vec{a}\right]=\vec{b}\,.$$

Donc, $\vec{u}$ vérifie bien $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions de } \vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{b} \text{ sont les vecteurs } \vec{u}=\lambda\vec{a}-\frac{1}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}\wedge\vec{b} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}.}$$

Exercice 5

1) Soit $\vec{u}\in E$. On a $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})$ avec $p(\vec{u})\in D$ et $q(\vec{u})\in D^\perp$.

Si $\vec{u}\in D=\mathrm{Vect}(\vec{a})$, alors $r(\vec{u})=p(\vec{u})$, $q(\vec{u})=\vec{0}$ et $\vec{a}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ (car $\vec{a}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires).

Si $\vec{u}\notin D$, alors $q(\vec{u})\neq\vec{0}$ et $q(\vec{u})\perp\vec{a}$, donc si on pose $\vec{e}_1=\vec{a}$, $\vec{e}_2=\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})$ et $\vec{e}_3=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$, la famille $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe de E ($\vec{a}$ est unitaire) adaptée à r.

Dans cette base, la matrice de r est :

$$M_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})=k\vec{a}+\|q(\vec{u})\|\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})=k\vec{e}_1+\|q(\vec{u})\|\vec{e}_2$, on a alors :

$$\begin{aligned}r(\vec{u})&=k\vec{e}_1+\|q(\vec{u})\|\cos\theta\,\vec{e}_2+\|q(\vec{u})\|\sin\theta\,\vec{e}_3\\&=k\vec{a}+\|q(\vec{u})\|\cos\theta\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})+\|q(\vec{u})\|\sin\theta(\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2)\\&=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\|q(\vec{u})\|\sin\theta\left(\vec{a}\wedge\frac{1}{\|q(\vec{u})\|}q(\vec{u})\right)\\&=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\sin\theta\big(\vec{a}\wedge q(\vec{u})\big)\end{aligned}.$$

Or, comme $\vec{a}$ et $p(\vec{u})$ sont colinéaires, on a :

$$\vec{a}\wedge q(\vec{u})=\vec{a}\wedge[\vec{u}-p(\vec{u})]=\vec{a}\wedge\vec{u}-\vec{a}\wedge p(\vec{u})=\vec{a}\wedge\vec{u}\,.$$

Donc :

$$\boxed{r(\vec{u})=p(\vec{u})+\cos\theta\,q(\vec{u})+\sin\theta\big(\vec{a}\wedge\vec{u}\big)}$$

On peut encore modifier la formule ci-dessus en remarquant qu'avec l'écriture $\vec{u}=p(\vec{u})+q(\vec{u})=k\vec{a}+q(\vec{u})$ avec $q(\vec{u})\perp\vec{a}$ et $\vec{a}$ unitaire, on a $k=\vec{u}.\vec{a}$ et :

$$\begin{aligned}p(\vec{u})&=(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}\\q(\vec{u})&=\vec{u}-p(\vec{u})=\vec{u}-(\vec{u}.\vec{a})\vec{a}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r(\vec{u}) &= (\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a} + (\cos\theta)\left[\vec{u} - (\vec{u}.\vec{a})\,\vec{a}\right] + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{u} \\ &= (\vec{u}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{u} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{u} \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc une expression de $r(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}$, $\vec{a}$ et θ uniquement.

Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe de *E*, notons $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. On a alors :

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= (\vec{i}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{i} \\ &= a_1(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{i} + (\sin\theta)\,(a_3\vec{j} - a_2\vec{k}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2\right]\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\vec{j}) &= (\vec{j}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{j} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{j} \\ &= a_2(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{j} + (\sin\theta)\,(a_1\vec{k} - a_3\vec{i}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 - (\sin\theta)a_3\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_2^2 + \cos\theta\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_2a_3 + (\sin\theta)a_1\right]\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(\vec{k}) &= (\vec{k}.\vec{a})(1-\cos\theta)\,\vec{a} + (\cos\theta)\,\vec{k} + (\sin\theta)\,\vec{a}\wedge\vec{k} \\ &= a_3(1-\cos\theta)\,(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos\theta)\,\vec{k} + (\sin\theta)\,(a_2\vec{i} - a_1\vec{j}) \\ &= \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 + (\sin\theta)a_2\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_2a_3 - (\sin\theta)a_1\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_3^2 + \cos\theta\right]\vec{k} \end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice de *r* dans la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$M_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r) = \begin{pmatrix} (1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3 & (1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2 \\ (1-\cos\theta)a_1a_2 - (\sin\theta)a_3 & (1-\cos\theta)a_2^2 + \cos\theta & (1-\cos\theta)a_2a_3 + (\sin\theta)a_1 \\ (1-\cos\theta)a_1a_3 + (\sin\theta)a_2 & (1-\cos\theta)a_2a_3 - (\sin\theta)a_1 & (1-\cos\theta)a_3^2 + \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rappelons que $a_1 = \vec{i}.\vec{a}$, $a_2 = \vec{j}.\vec{a}$ et $a_3 = \vec{k}.\vec{a}$ avec $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ (car $\vec{a}$ est unitaire).

2) Soient $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormale directe de *E* et *r* une rotation d'axe *D* dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et d'angle $\theta \in [0,\pi]$.

D'après ce qui précède, on a $M = M_{(\vec{i},\vec{j},\vec{k})}(r) = M_s + M_a$, avec :

$$M_s = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) = (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \cos\theta\, I_3 \quad \text{et} \quad M_a = \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) = \sin\theta\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $M = I_3$, alors $\theta = 0$ et $r = id_E$.
- Si *M* est symétrique et $M \neq I_3$, alors $\sin\theta = 0$, donc $\theta = \pi$ $M = \begin{pmatrix} 2a_1^2 - 1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & 2a_2^2 - 1 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & 2a_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ et l'on retrouve facilement a_1, a_2, a_3 à partir des coefficients de *M*.
- Si *M* n'est pas symétrique, alors $\theta \in \,]0,\pi[$ et $Tr(M) = 1 + 2\cos\theta$ donne θ.

  Enfin, a_1, a_2, a_3 sont obtenus facilement à l'aide de $\dfrac{1}{2\sin\theta}\left(M - {}^tM\right) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ donne.

3) Si r existe, alors son axe est $D = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ ($\vec{a}$ est unitaire).

Avec les notations des questions précédentes, on alors $a_1 = -a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et, si D est orienté par $\vec{a}$:

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= \left[(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_2 + (\sin\theta)a_3\right]\vec{j} + \left[(1-\cos\theta)a_1a_3 - (\sin\theta)a_2\right]\vec{k} \\ &= \left[\frac{1}{3}(1-\cos\theta)a_1^2 + \cos\theta\right]\vec{i} + \left[-\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]\vec{j} + \left[\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right]\vec{k} \end{aligned}$$

Donc :

$$r(\vec{i}) = -\vec{j} \iff \begin{cases} \frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \cos\theta = 0 \\ -\frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = -1 \\ \frac{1}{3}(1-\cos\theta) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \theta = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

Ainsi, si r existe, elle est unique. Réciproquement, la rotation trouvée ci-dessus vérifie bien $r(\vec{u}) = \vec{u}$ (car $\vec{u}$ appartient à l'axe et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ car $\theta = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et on a raisonné par équivalences ci-dessus.

Finalement :

La seule rotation vérifiant $r(\vec{u}) = \vec{u}$ et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe dirigée et orienté par $-\vec{u}$.

Exercice 6

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par sa base canonique. Dire que A est une matrice de rotation revient à dire que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est une rotation.

Comme la base canonique est orthonormée directe, A est une matrice de rotation si et seulement si elle est orthogonale et de déterminant égal à 1, soit (avec $\det A = a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$) :

$$\begin{cases} {}^tAA = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ac = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \end{cases}$$

Or, quels que soient a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) \\ &(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc \end{aligned}$$

Donc, si on pose $abc = p$, on a :

$$\begin{cases} {}^tAA = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \iff (S) : \begin{cases} a+b+c = 1 \\ ab+bc+ac = 0 \\ abc = p \end{cases} \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

De plus, quels que soient a, b et c, ce sont les racines de $(X-a)(X-b)(X-c)$ et :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ac)X - abc.$$

Donc, a, b et c vérifient (S) si et seulement si ce sont les racines réelles de $X^3 - X^2 - p$.

Or, le tableau de variations de $f : x \mapsto x^3 - x^2 - p$ est :

x	$-\infty$		0		$2/3$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-p$	$\searrow$	$-\frac{4}{27}-p$	$\nearrow$	$+\infty$

Alors $X^3 - X^2 - p$ admet trois racines réelles si et seulement si $-\frac{4}{27} - p \le 0 \le -p$, soit :

$$-\frac{4}{27} \le p \le 0.$$

Finalement :

$$\begin{cases} {}^tAA = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\frac{4}{27} \le abc \le 0 \end{cases} \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc :

$$\boxed{A \text{ est la matrice d'une rotation } r \text{ si et seulement si } \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\frac{4}{27} \le abc \le 0 \end{cases}}$$

Remarquons que pour $a = 1$ et $b = c = 0$, on a $A = I_3$. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

Les conditions ci-dessus étant remplies, appelons D l'axe de la rotation r et α son angle.

On a :

$$Tr(A) = 3a = 1 + 2\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{3a-1}{2}.$$

Cherchons $D = \ker(A - I_3)$, c'est-à-dire les vecteurs fixes par A. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz = x \\ cx+ay+bz = y \\ bx+cy+az = z \end{cases}$$

Remarquons que $a+b+c=1$, donc $\vec{e}\,(1,1,1)$ est solution et comme A est une matrice de rotation d'axe D (une droite), on a immédiatement $D = \text{Vect}(\vec{e})$.

Reste à orienter l'axe ou l'angle. Soit $\vec{v}\,(1,-1,0) \in D^{\perp}$. On a $r(\vec{v})\,(a-b, c-a, b-c)$, donc $\vec{v} \wedge r(\vec{v}) = (c-b)\vec{e}$.

Alors, si D est orienté par $\vec{e}$, l'angle de r est $\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b>0$ et $-\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b<0$. Reste à voir le cas où $b=c$.

Dans ce cas, on a $b=c\neq 0$ (sinon $A=I_3$) et :

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 2ab+b^2=0 \end{cases} \iff a=-\frac{1}{3} \text{ et } b=\frac{2}{3} \text{ avec } b\neq 0 \implies \cos\alpha=-1.$$

Donc, *r* est le retournement d'axe *D*.

Finalement :

L'axe de la rotation est $D=\mathrm{Vect}(\vec{e})$ avec $\vec{e}(1,1,1)$.

Quand *D* est orienté par $\vec{e}$, l'angle de la rotation est :

- $\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b>0$;
- $-\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b<0$;
- π quand $b=c$.

Exercice 7

Appelons C et C' les centres respectifs de $O(E)$ et $SO(E)$. On a par définition :

$$C=\{s\in O(E)\setminus \forall u\in O(E),\ u\circ s=s\circ u\}$$

$$C'=\{r\in SO(E)\setminus \forall u\in SO(E),\ u\circ r=r\circ u\}$$

Comme l'application id_E commute avec tous les endomorphismes de *E*, elle appartient à C et à C', et l'application $-id_E$ appartient à C (*attention* : $-id_E\notin SO(E)$ car $\det(-id_E)=-1$, donc $-id_E\notin C'$).

Soit *r* une rotation de C' (il y en a, ne serait-ce que id_E). Elle commute avec toutes les rotations de *E*, donc pour tout $x\in E$ non nul, *r* commute avec r_x, le retournement d'axe dirigé par *x*.

On a donc $r_x\circ r(x)=r\circ r_x(x)$ et comme $r_x(x)=x$, on obtient $r_x\big(r(x)\big)=r(x)$. Ainsi, $r(x)$ appartient à l'axe de r_x, donc est colinéaire à *x*. Comme, les deux vecteurs sont de même norme, on obtient finalement pour tout :

$$\forall x\in E,\ r(x)=x \ \ ou\ \ r(x)=-x.$$

Comme $-id_E\notin SO(E)$, on a $r\neq -id_E$ donc il existe un vecteur non nul x_1 de *E* tel que $r(x_1)=x_1$.

Supposons qu'il existe $x_2\in E$ non nul tel que $r(x_2)=-x_2$. Alors, $r(x_1+x_2)=r(x_1)+r(x_2)=x_1-x_2$, mais d'après ce qui précède :

- soit $r(x_1+x_2)=x_1+x_2$, ce qui implique $x_2=0$: absurde ;
- soit $r(x_1+x_2)=-(x_1+x_2)=-x_1-x_2$, ce qui implique $x_1=0$: absurde.

Ainsi, il n'existe pas de vecteur non nul transformé en son opposé et donc $r=id_E$.

Finalement, on a :

$$\boxed{C'=\{id_E\}}$$

Soit $s \in C$.

- Si s est une rotation, alors comme elle commute avec toutes les isométries de E, y compris les rotations, donc elle appartient à C', soit $s = id_E$.
- Si s est une réflexion par rapport à un plan P, alors pour tout $x \in P^\perp$ et pour tout $u \in O(E)$, on a :

$$s \circ u(x) = u \circ s(x) \quad \Leftrightarrow \quad s\big(u(x)\big) = u(-x) = -u(x).$$

  Donc $u(x) \in P^\perp$. Ceci prouve que $P^\perp$ est stable par toutes les isométries de E, ce qui est absurde (pour s'en convaincre, il suffit de considérer une rotation d'axe dirigé par un vecteur de P et d'angle $\pi/2$). Ainsi, C ne contient pas de réflexion.
- Si s est la composée commutative d'une rotation r d'axe D et d'angle α par une réflexion σ par rapport au plan $D^\perp$, alors, la matrice de s dans une base orthonormée appropriée est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

  Et pour tout $M \in O(3)$, on a $AM = MA$. En posant, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a ${}^tMM = I_3$ donc $M \in O(3)$ et :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} = MA = \begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

  Donc $\cos\alpha = -1$ et $\sin\alpha = 0$, soit $A = -I_3$ et donc $s = -id_E$.

Finalement, on a :

$$\boxed{C = \{id_E, -id_E\}}$$

Exercice 8

On a :

$$A \in SO_2(\mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} {}^tAA = I_2 \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Remarquons que, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a ${}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$, donc :

$$A \in SO_2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1 \\ \det A = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Tr({}^tAA) = 2 \\ \det A = 1 \end{cases}$$

Réciproquement :

$$\begin{cases} Tr({}^tAA) = a^2+c^2+b^2+d^2 = 2 & (1) \\ \det A = ad - bc = 1 & (2) \end{cases} \underset{(1)-2(2)}{\Rightarrow} a^2+c^2+b^2+d^2-2ad+2bc = (a-d)^2+(c+b)^2 = 0.$$

Or, les nombres sont réels, donc la somme de deux carrés est nulle si et seulement si les deux carrés le sont. Ainsi :

$$(a-d)^2+(c+b)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-d)^2=(c+b)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=d \\ c=-b \end{cases}$$

Avec $a=d$ et $c=-b$:

- $a^2+c^2+b^2+d^2=2a^2+2c^2=2b^2+2d^2=2 \quad\Rightarrow\quad a^2+c^2=b^2+d^2=1$;
- $ab+cd=ab-ba=0$.

Ainsi :

$$\begin{cases} Tr({}^tAA)=2 \\ \det A=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} {}^tAA=I_2 \\ \det A=1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A\in SO_2(\mathbb{R}).$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{A\in SO_2(\mathbb{R}) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} Tr({}^tAA)=2 \\ \det A=1 \end{cases}}$$

Exercice 9

1) L'application *f* est définie sur *E* et à images dans *E*. Elle est de plus linéaire par linéarité à droite du produite vectoriel, donc c'est un endomorphisme de *E*.

De plus, on a $g=id_E+f$ et $h=f^2$, donc :

$$\boxed{f,\ g \text{ et } h \text{ sont des endomorphismes de } E.}$$

2) Posons $\vec{i}=\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ et considérons un vecteur unitaire $\vec{j}\in(\vec{a})^\perp$. Comme $\dfrac{1}{\|\vec{a}\|}>0$, $\vec{i}$ et $\vec{a}$ sont colinéaires de même sens. En posant $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$, la famille $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base orthonormée directe de *E*. Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une base orthonormée directe } \mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k}) \text{ de } E \text{ telle que } \vec{i} \text{ et } \vec{a} \text{ soient colinéaires de même sens.}}$$

On a alors $\vec{a}=\|\vec{a}\|\vec{i}$, donc :

$$f(\vec{i})=\vec{a}\wedge\vec{i}=\|\vec{a}\|\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{0}$$
$$f(\vec{j})=\vec{a}\wedge\vec{j}=\|\vec{a}\|\vec{i}\wedge\vec{j}=\|\vec{a}\|\vec{k}$$
$$f(\vec{k})=\vec{a}\wedge\vec{k}=\|\vec{a}\|\vec{i}\wedge\vec{k}=-\|\vec{a}\|\vec{j}$$

Alors :

$$\boxed{A=M_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|\vec{a}\| \\ 0 & \|\vec{a}\| & 0 \end{pmatrix}}$$

3) En posant $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, on peut écrire :

$$A=\|\vec{a}\|\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\|\vec{a}\|\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;C\end{pmatrix}.$$

On a $C^2=-I_2$, donc $C^3=-C$ et :

$$A^3=\|\vec{a}\|^3\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;C^3\end{pmatrix}=\|\vec{a}\|^3\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;-C\end{pmatrix}=-\|\vec{a}\|^3\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;C\end{pmatrix}=-\|\vec{a}\|^2\,A.$$

Comme $A=M_{\mathcal{B}}(f)$, ceci prouve que :

$$\boxed{f^3=-\|\vec{a}\|^2\,f}$$

4) Remarquons que, comme $C^2=-I_2$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$C^{2n}=(-1)^n I_2.$$

Alors :

$$A^{2n}=\|\vec{a}\|^{2n}\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;C^{2n}\end{pmatrix}=\|\vec{a}\|^{2n}\begin{pmatrix}0&0\;\;\;0\\0&\\0&(-1)^n I_2\end{pmatrix}=\left(-\|\vec{a}\|^2\right)^n J \quad\text{avec } J=\begin{pmatrix}0&0\;\;0\\0&\\0&\;\;I_2\end{pmatrix}.$$

Et en remarquant que $AJ=A$, on a :

$$A^{2n+1}=A^{2n}A=\left(-\|\vec{a}\|^2\right)^n JA=\left(-\|\vec{a}\|^2\right)^n A.$$

Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n!}A^n&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n)!}A^{2n}+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(2n+1)!}A^{2n+1}\\&=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n)!}\left(-\|\vec{a}\|^2\right)^n J+\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{(2n+1)!}\left(-\|\vec{a}\|^2\right)^n A\\&=\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\|\vec{a}\|^{2n}\right]J+\frac{1}{\|\vec{a}\|}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\|\vec{a}\|^{2n+1}\right]A\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{N\to+\infty}\left[\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\|\vec{a}\|^{2n}\right]=\cos\left(\|\vec{a}\|\right)$ et $\lim\limits_{N\to+\infty}\left[\sum\limits_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\|\vec{a}\|^{2n+1}\right]=\sin\left(\|\vec{a}\|\right)$, donc :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n!}A^n=\cos\left(\|\vec{a}\|\right)J+\sin\left(\|\vec{a}\|\right)\frac{1}{\|\vec{a}\|}A.$$

Finalement :

$$\boxed{\sum\frac{1}{n!}A^n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\cos\left(\|\vec{a}\|\right)&-\sin\left(\|\vec{a}\|\right)\\0&\sin\left(\|\vec{a}\|\right)&\cos\left(\|\vec{a}\|\right)\end{pmatrix}.}$$

5) Comme $g = id_E + f$, on a :

$$B = M_{\mathcal{B}}(g) = I_3 + M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\|\vec{a}\| \\ 0 & \|\vec{a}\| & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\chi_g = \det\left(X I_3 - B\right) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & \|\vec{a}\| \\ 0 & -\|\vec{a}\| & X-1 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapportà la première ligne :

$$\chi_g = (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & \|\vec{a}\| \\ -\|\vec{a}\| & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X-1)^2 + \|\vec{a}\|^2\right].$$

Comme $\|\vec{a}\| > 0$, $(X-1)^2 + \|\vec{a}\|^2$ n'a pas de racine réelle, donc, la seule valeur propre de g est 1.

Alors :

$$g(\vec{x}) = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \in \text{Vect}(\vec{a}).$$

Finalement :

$$\boxed{Sp(g) = \{1\} \text{ avec } E_1 = \ker\left(g - id_E\right) = \text{Vect}(\vec{a})}$$

6) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a déjà $\chi_g(g) = 0$ et $\deg \chi_g = 3$.

Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ annulateur de g, non nul (donc non constant) et unitaire.

Comme le spectre de g est inclus dans l'ensemble des racines de P, 1 est racine de P, soit $X-1 \mid P$.

Si $\deg P = 1$, alors $P = X-1$, et $P(g) = 0$ revient alors à $g = id_E$, qui est faux.

Donc, $\deg P = 2$ et $P = (X-1)(X-a)$. On a alors $P(g) = (g - id_E)(g - \alpha\, id_E) = 0$ et si α n'est pas valeur propre de g, alors $g - \alpha\, id_E \in GL(E)$, donc $(g - id_E)(g - \alpha\, id_E)(g - \alpha\, id_E)^{-1} = g - id_E = 0$, qui est faux.

Ainsi, α n'est pas valeur propre de g, soit $\alpha = 1$ et donc $P = (X-1)^2$.

Avec les notations des questions précédentes, on a alors :

$$P(B) = (B - I_3)^2 = A^2 = \|\vec{a}\|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{I_2} \end{pmatrix} = 0_3.$$

Ceci est à nouveau absurde car $\vec{a}$ est non nul donc $\|\vec{a}\| \neq 0$.

Finalement, l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ annulateur de g non nul mène à une absurdité dans tous les cas, donc le degré minimal d'un polynôme annulateur de g est 3 et ainsi :

$$\boxed{\text{Un polynôme annulateur de } g \text{ de degré le plus bas possible est } \chi_g = (X-1)\left[(X-1)^2 + \|\vec{a}\|^2\right].}$$

7) On a vu dans la question 1 que $h = f^2$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(h) = M_{\mathcal{B}}(f^2) = \left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|\vec{a}\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \|\vec{a}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Il en découle immédiatement que :

$$\boxed{Sp(g) = \left\{1, \|\vec{a}\|^2\right\} \text{ avec } \begin{cases} E_1 = \ker\left(h - id_E\right) = \mathrm{Vect}(\vec{a}) \\ E_{\|\vec{a}\|^2} = \ker\left(h - \|\vec{a}\|^2\, id_E\right) = \left(\mathrm{Vect}(\vec{a})\right)^{\perp} \end{cases}}$$