Corrigés des TD du chapitre 19

Exercice 1

1) Remarquons préalablement que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\left|t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right| \leq |t|$ et $\left|t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right| \leq |t|$, donc :

$$\lim_{t\to 0}\left[t\cos\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left[t\sin\left(\frac{\alpha}{t}\right)\right] = 0.$$

La fonction $f:(x,y)\mapsto \begin{cases} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0), a\in\mathbb{R}\}$ en tant que produit de telles fonctions avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y\neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit $a\in\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x,0)-f(a,0)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ existe et vaut 0.
- $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(a,y)-f(a,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\left[y\sin\left(\frac{a}{y}\right)\right] = 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0)$ existe et vaut 0.

Ainsi, *f* admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Soit $a\in\mathbb{R}^*$.

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a,0)$;
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, mais $x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$ n'admet pas de limite quand $(x,y)\to(a,0)$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'admet pas de limite quand $(x,y)\to(a,0)$.

Ainsi, *f* n'est pas de classe C^1 en $(a,0)$ quand $a\in\mathbb{R}^*$.

Par contre, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi, *f* est de classe C^1 en $(0,0)$.

Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \cup\{(0,0)\}\text{, mais pas plus.}}$$

On a :

- pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$, donc $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 1$ et ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut 1 ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = 0$ et ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existent et sont différents.}}$$

Autrement dit : le théorème de Schwarz n'est pas vérifié en $(0,0)$*, ce qui est possible car f n'est pas de classe* C^1*, et a fortiori* C^2*, sur un ouvert contenant ce point.*

2) La fonction sh étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où Δ est la première bissectrice (d'équation $x = y$) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y} = \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec $\phi(t) = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t}$ et $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$.

Remarquons que les fonctions ϕ et φ sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{2}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{x-y}{2}$ sont polynomiales, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- La fonction ϕ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (la fonction ch ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$).
- La fonction φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

  De plus, en 0, on a $\varphi(t) \underset{0}{\sim} 1$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 1$.

  Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(t) = \dfrac{\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}$ et, au voisinage de 0, on a $\varphi'(t) = \dfrac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \dfrac{o(1)}{1 + o(1)}$, donc φ' admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de φ est de classe C^1 en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par composition, $(x,y) \mapsto \phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $(x,y) \mapsto \varphi\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un prolongement de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 2

1) Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on a:

$$f(P)=\int_0^1 P^2=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right)^2 dt=\int_0^1\left(\sum_{0\le i,j\le n} a_i a_j t^{i+j}\right)dt=\sum_{0\le i,j\le n} a_i a_j \int_0^1 t^{i+j}dt=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{1}{i+j+1}a_i a_j \,.$$

Ainsi, *f* est polynômiale sur $\mathbb{R}_n[X]$ donc :

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } \mathbb{R}_n[X].}$$

Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on a :

$$f(P)=\sum_{\substack{0\le i,j\le n\\ i,j\ne k}}\frac{1}{i+j+1}a_i a_j+2\sum_{\substack{i=0\\ i\ne k}}^{n}\frac{1}{i+k+1}a_i a_k+\frac{1}{2k+1}a_k^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial a_k}(P)=\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+k+1}a_i \,.$$

Donc, pour tout $H=\sum_{k=0}^{n} h_k X^k\in\mathbb{R}_n[X]$, $df(P)\cdot H=\sum_{j=0}^{p}\left(h_j\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{i+j+1}a_i\right)$, soit :

$$\boxed{df(P)\cdot H=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_i h_j}{i+j+1}}$$

Autre version (plus chic !) :

Munissons $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P\mid Q)=\int_0^1 PQ$ (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie). On a alors $f(P)=\int_0^1 P^2=\|P\|^2$ et pour tous $P,H\in\mathbb{R}_n[X]$:

$$f(P+H)=\|P+H\|^2=\|P\|^2+2(P\mid H)+\|H\|^2=f(P)+2(P\mid H)+\underset{H\to 0}{o}\left(\|H\|\right).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{df(P)\cdot H=2(P\mid H)=2\int_0^1 PH}$$

Remarquons qu'avec $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $H=\sum_{k=0}^{n} h_k X^k$, on a $2\int_0^1 PH=\sum_{0\le i,j\le n}\frac{2a_i h_j}{i+j+1}$.

2) Remarquons que $A\mapsto \det A$ est polynômiale en les coefficients de *A*, donc continue. Alors, $\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$), donc $GL_n(\mathbb{R})=\det^{-1}\left(\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\det^{-1}\left(\{0\}\right)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in GL_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0$.

Comme *A* est inversible, 0 n'est pas valeur propre de *A*, donc $\chi_A(0)=a_0\ne 0$. Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\ldots+a_1A+a_0I_n=0_n$, donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n)A=I_n \quad\Rightarrow\quad A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\ldots+a_1I_n)\,.$$

Or, $\chi_A = \det\left(X I_n - A\right)$, donc les a_k sont polynômiaux en les coefficients de *A*. Comme les coefficients des puissances de *A*, sont aussi polynômiaux en les coefficients de *A*, les coefficients de A^{-1} sont polynômiaux en les coefficients de *A*.

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur son ensemble de définition.}}$$

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $A + tE_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$ pour *t* réel proche de 0 (car $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert) et :

$$\frac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j}) - f(A)\right] = \frac{1}{t}\left[(A+tE_{i,j})^{-1} - A^{-1}\right] = \frac{1}{t}(A+tE_{i,j})^{-1}\left(I_n - (A+tE_{i,j})A^{-1}\right) = -(A+tE_{i,j})^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A) = \lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{t}\left[f(A+tE_{i,j}) - f(A)\right]\right) = -A^{-1}E_{i,j}A^{-1}$ et donc pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$df(A)(E_{i,j}) = -A^{-1}E_{i,j}A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{df(A) : M \mapsto -A^{-1}MA^{-1}}$$

3) Soit $(x,h) \in E^2$. On a :

$$f(x+h) = \left(x+h \mid u(x+h)\right) = \left(x+h \mid u(x)+u(h)\right) = \left(x \mid u(x)\right) + \left(h \mid u(x)\right) + \left(x \mid u(h)\right) + \left(h \mid u(h)\right).$$

Comme *u* est symétrique, $\left(x \mid u(h)\right) = \left(h \mid u(x)\right)$ donc :

$$f(x+h) = f(x) + 2\left(h \mid u(x)\right) + \left(h \mid u(h)\right).$$

Et comme *u* est un endomorphisme réel symétrique, il est diagonalisable, donc il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de *E* dans laquelle, si $h = h_1e_1 + h_2e_2 + \dots + h_ne_n$, on a $u(h) = h_1\lambda_1e_1 + h_2\lambda_2e_2 + \dots + h_n\lambda_ne_n$ et, en posant $m = \max\left(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\right)$, on obtient :

$$\|u(h)\| = \sqrt{h_1^2\lambda_1^2 + h_2^2\lambda_2^2 + \dots + h_n^2\lambda_n^2} \le m\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} = m\|h\|.$$

Alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\left(h \mid u(h)\right)\right| \le \|h\|.\|u(h)\| \le m\|h\|^2 \quad \Rightarrow \quad \left(h \mid u(h)\right) = \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Ainsi :

$$f(x+h) = f(x) + 2\left(h \mid u(x)\right) + \underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est différentiable sur } E \text{ et pour tout } x \in E,\ df(x) : h \mapsto 2\left(h \mid u(x)\right)}$$

Soit $(x,h) \in E^2$ tel que $x \ne 0$ et $x + h \ne 0$. On a :

$$g(x+h) = \frac{\left(x+h \mid u(x+h)\right)}{\left(x+h \mid x+h\right)} = \frac{\left(x \mid u(x)\right) + 2\left(h \mid u(x)\right) + \left(h \mid u(h)\right)}{\left(x \mid x\right) + 2\left(h \mid x\right) + \left(h \mid h\right)} = \frac{\left(x \mid u(x)\right) + 2\left(h \mid u(x)\right) + \left(h \mid u(h)\right)}{\left(x \mid x\right)\left[1 + 2\dfrac{\left(h \mid x\right)}{\left(x \mid x\right)} + \dfrac{\left(h \mid h\right)}{\left(x \mid x\right)}\right]}$$

Or :

$$\left(2\frac{(h\,|\,x)}{(x\,|\,x)}+\frac{(h\,|\,h)}{(x\,|\,x)}\right)^2 \le \frac{1}{\|x\|^4}\left(2\left|(h\,|\,x)\right|+\left|(h\,|\,h)\right|\right)^2 \le \frac{1}{\|x\|^4}\left(2\|x\|.\|h\|+\|h\|^2\right)^2 \le \|h\|^2\,\frac{\left(2\|x\|+\|h\|\right)^2}{\|x\|^4}.$$

Donc $\left(2\dfrac{(h\,|\,x)}{(x\,|\,x)}+\dfrac{(h\,|\,h)}{(x\,|\,x)}\right)^2 \underset{h\to 0}{=} o\left(\|h\|\right)$ et :

$$g(x+h)=\frac{f(x)+2\left(h\,|\,u(x)\right)+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)}{(x\,|\,x)}\left[1-2\frac{(h\,|\,x)}{(x\,|\,x)}+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right)\right]=g(x)+2\frac{\left(h\,|\,u(x)\right)-(h\,|\,x)\,g(x)}{(x\,|\,x)}+\underset{h\to 0}{o}\left(\|h\|\right).$$

Donc :

$$\boxed{g \text{ est différentiable sur } E\setminus\{0\} \text{ et pour tout } x\in E\setminus\{0\},\ dg(x): h\mapsto 2\frac{\left(h\,|\,u(x)\right)-(h\,|\,x)\,g(x)}{(x\,|\,x)}}$$

Soit $a\in E\setminus\{0\}$ tel que $dg(a)=0$, soit pour tout $h\in E$:

$$\left(h\,|\,u(a)\right)-(h\,|\,a)\,g(a) \quad\Leftrightarrow\quad \left(h\,|\,u(a)-g(a)a\right)=0.$$

En posant $\lambda=g(a)\in\mathbb{R}$, ceci revient à $u(a)=\lambda a$ et donc, a (qui est non nul) est vecteur propre de u.

Réciproquement, si $a\in E\setminus\{0\}$ est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors :

$$u(a)-g(a)a=u(a)-\frac{\left(a\,|\,u(a)\right)}{(a\,|\,a)}a=\lambda a-\frac{(a\,|\,\lambda a)}{(a\,|\,a)}a=\lambda a-\lambda\frac{(a\,|\,a)}{(a\,|\,a)}a=0.$$

Et donc, $dg(a)=0$.

Ainsi :

$$\boxed{dg(a)=0 \text{ si et seulement si } a \text{ est un vecteur propre de } u.}$$

Exercice 3

Comme φ admet un maximum local en $\left(u(a),v(b)\right)$, il existe une boule ouverte B, de centre $\left(u(a),v(b)\right)$ et de rayon $r>0$, telle que :

$$\forall\,(X,Y)\in B,\ \varphi(X,Y)\le\varphi\left(u(a),v(b)\right).$$

Par ailleurs, u et v sont continues respectivement en a et b donc $(x,y)\mapsto\left(u(x),v(y)\right)$ est continue en (a,b).

Ceci implique qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B\left((a,b),\alpha\right)$:

$$\left(u(x),v(y)\right)\in B.$$

Alors, pour tout $(x,y)\in B\left((a,b),\alpha\right)$, on a :

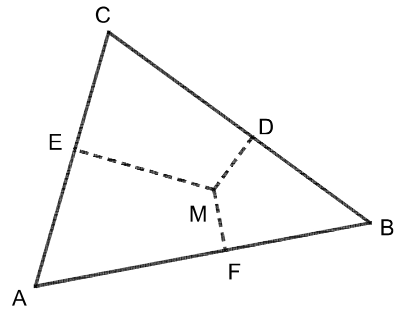
$$f(x,y)=\varphi\left(u(x),v(y)\right)\le\varphi\left(u(a),v(b)\right).$$

Ceci montre que :

$$\boxed{f \text{ admet un maximum local en } (a,b).}$$

Exercice 4

Faisons un schéma. On note D, E et F les projetés orthogonaux de M sur (BC), (AC) et (AB) respectivement.



On cherche le maximum de $MD\times ME\times MF$.

Appelons S l'aire du triangle ABC. On a :

$$S = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = \frac{1}{2}\left(MD\times BC + ME\times AC + MF\times AB\right).$$

Posons $x = MD$ et $y = ME$. On a alors $x, y \in \mathbb{R}_+$ et $MF = \dfrac{2S - MD\times BC - ME\times AC}{AB}$, donc :

$$MD\times ME\times MF = \frac{MD\times ME\times\left(2S - MD\times BC - ME\times AC\right)}{AB}.$$

Et $MD\times ME\times MF$ est maximal quand $MD\times ME\times\left(2S - MD\times BC - ME\times AC\right)$ l'est.

Posons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et :

$$f(x, y) = MD\times ME\times\left(2S - MD\times BC - ME\times AC\right) = xy\left(2S - ax - by\right) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2.$$

La fonction f est polynômiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2Sy - 2axy - by^2 = y\left(2S - 2ax - by\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2Sx - ax^2 - 2bxy = x\left(2S - ax - 2by\right)$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y\left(2S - 2ax - by\right) = 0 \\ x\left(2S - ax - 2by\right) = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 2ax + by = 2S \\ x = 0 \text{ ou } ax + 2by = 2S \end{cases}$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, alors $f(x, y) = 0$ donc f est minimale (car $f(x, y)$ est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique (x, y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax + by = 2S \\ ax + 2by = 2S \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x, y) = \left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}\right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Or, on peut écrire pour tout $(x, y)\in\mathbb{R}_+^2$:

$$f(x, y) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2 = \frac{y(by - 2S)^2}{4a} - ay\left(x + \frac{by - 2S}{2a}\right)^2 \leq \frac{y(by - 2S)^2}{4a} = \frac{1}{4a}g(y).$$

Remarquons que comme M reste à l'intérieur du triangle ABC, $y = ME$ reste inférieur à la longueur h de la hauteur issue de B. Or, $S = \dfrac{h\times AC}{2} = \dfrac{hb}{2}$, donc $h = \dfrac{2S}{b}$. Ainsi, $y \in \left[0, \dfrac{2S}{b}\right]$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(y) = (by-2S)^2 + 2by(by-2S) = (3by-2S)(by-2S)$.

On a alors le tableau :

y	0		$\frac{2S}{3b}$		$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	0
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, g est maximale quand $y = \dfrac{2S}{3b}$ et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $y \in \left[0, \dfrac{2S}{b}\right]$, on a :

$$f(x,y) \le \frac{1}{4a} g(y) \le \frac{1}{4a} g\left(\frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement, $\dfrac{8S^3}{27ab}$ est le maximum de f atteint quand $x = MD = \dfrac{2S}{3a}$ et $y = ME = \dfrac{2S}{3b}$, et dans ce cas, avec $c = AB$, on obtient :

$$MF = \frac{2S - MD\times BC - ME\times AC}{AB} = \frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

> Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle est $\dfrac{8S^3}{27AB\times BC\times CA}$, atteint quand $d\big(M,(BC)\big) = \dfrac{2S}{3BC}$, $d\big(M,(AC)\big) = \dfrac{2S}{3AC}$ et $d\big(M,(AB)\big) = \dfrac{2S}{3AB}$.

Remarquons que le point M ci-dessus est le centre de gravité G de ABC.

En effet, si, comme plus haut, D est le projeté orthogonal de G sur (BC), on a $S_{GBC} = \dfrac{BC\times GD}{2}$, donc :

$$GD = \frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC} = \left\|\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG}\right]\right\| = \left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BG})\right| = \left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})\right)\right| = \left|\det_{\mathcal{B}}\left(\overrightarrow{BC}, \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})\right| = \frac{1}{3}2S.$$

Donc :

$$GD = d\big(G,(BC)\big) = \frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même, $d\big(G,(AC)\big) = \dfrac{2S}{3AC}$ et $d\big(G,(AB)\big) = \dfrac{2S}{3AB}$.

Exercice 5

1) On a $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Commençons par considérer la fonction $h:(x,y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc :

$$y \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $I=[0,y]$ ou $[y,0]$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue et intégrable sur le segment *I*.
- Pour tout $t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur *I*.
- Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$, donc y admet un maximum et $t \mapsto \max\limits_{x\in[a,b]}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right]$ est continue sur le segment *I*, donc intégrable.

Alors, $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $[a,b]$, de dérivée $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$.

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$. Or, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)$, donc :

$$\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt = -\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,t)dt = -\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right]_0^y = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,0).$$

Enfin, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)dt$ l'est aussi en tant que différence de telles fonctions et finalement :

$$x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de dérivée } x \mapsto -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,0).$$

Ainsi, $h:(x,y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, de dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Enfin, la fonction $\ell : x \mapsto \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, de dérivée $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

En définitive, $g = h - \ell$ est la différence de deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

De plus, d'après ce qui précède, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \ell}{\partial y}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}}$$

2) Posons $\varphi(r,\theta) = f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]$. Comme $(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto r\sin\theta$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]$, on a :

- pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \varphi(r,\theta)$ est continue, et donc intégrable sur le segment $[0,2\pi]$;
- pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $r \mapsto \varphi(r,\theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) \ ;$$

- Pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta)$ est continue sur *I* en tant que somme de telles fonctions ;
- Pour tout segment $[0,a] \subset \mathbb{R}_+$, $(x,y) \mapsto \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$ et $(x,y) \mapsto \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$ sont continues sur le compact $[-a,a] \times [-a,a]$ donc y admettent toutes deux un maximum, respectivement M_1 et M_2 ; alors, pour tout $(r,\theta) \in [0,a] \times [0,2\pi]$, on a $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta)\right| \leq M_1\left|\cos\theta\right| + M_2\left|\sin\theta\right|$ et $\theta \mapsto M_1\left|\cos\theta\right| + M_2\left|\sin\theta\right|$ est continue et intégrable sur le segment $[0,2\pi]$.

Ainsi :

$$\boxed{\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(r,\theta)d\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \Phi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta)d\theta.}$$

On a alors, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\Phi'(r) &= \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\cos\theta \frac{\partial g}{\partial y}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) - \sin\theta \frac{\partial g}{\partial x}\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right)\right]d\theta\end{aligned}$$

Et, pour tout $r\in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Phi'(r)=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left[-r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta\,,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\right]d\theta=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\,d\theta.$$

Soit :

$$\Phi'(r)=\frac{1}{r}\Big[g(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\Big]_0^{2\pi}=\frac{1}{r}\Big[g(r\,,0)-g(r\,,0)\Big]=0.$$

Ainsi, Φ' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et, comme elle est continue sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{\Phi'=0}$$

3) L'application $\Phi : r\mapsto \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\,d\theta$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc elle y est constante.

Supposons que *f* possède un extremum local en $(0,0)$. Quitte à changer *f* en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut supposer que c'est un minimum. Il existe alors un réel $R>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),R\big)$, on a $f(x,y)\geq f(0,0)$.

Soit $r\in[0,R[$. Pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, on a $(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\in B\big((0,0),R\big)$, donc $f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)-f(0,0)\geq 0$. De plus, $\theta\mapsto f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)-f(0,0)$ est continue sur $[0,2\pi]$ et :

$$\int_0^{2\pi}\Big[f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)-f(0,0)\Big]d\theta=\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)\,d\theta-\int_0^{2\pi}f(0,0)d\theta=\Phi(r)-\Phi(0)=0.$$

Nous avons donc une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$: elle est nulle sur ce segment, soit pour tout $\theta\in[0,2\pi]$, $f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)=f(0,0)$.

Ceci étant vrai pour tout $r\in[0,R[$, on a finalement, $f(r\cos\theta\,,r\sin\theta)=f(0,0)$ pour tout $(r,\theta)\in[0,R[\times[0,2\pi]$, soit $f(x,y)=f(0,0)$ pour tout $(x,y)\in B\big((0,0),R\big)$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est constante au voisinage de } (0,0).}$$

Exercice 6

1) Soit *f* une éventuelle solution du système sur $\mathbb{R}^2$.

Les dérivées partielles existent et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x+y \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy+g(y)$$

avec *g* dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+g'(y)=x-y \quad\Rightarrow\quad g'(y)=-y \quad\Rightarrow\quad g(y)=-\frac{1}{2}y^2+k$$

avec *k* constante réelle.

Ainsi, si *f* est solution du système sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la fonction polynômiale $f:(x,y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ avec pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y.$$

Donc, *f* est solution du système sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions du système sur } \mathbb{R}^2 \text{ sont les fonctions } (x,y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$$

2) Soit *h* une éventuelle solution de (E) : $x + y + (x-y)y' = 0$ sur $\mathbb{R}$. Posons :

$$\Phi(x) = f\left(x, h(x)\right).$$

Comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x, h(x)\right) + h'(x)\frac{\partial f}{\partial y}\left(x, h(x)\right) = x + h(x) + h'(x)\left[x - h(x)\right] = 0.$$

Ainsi, Φ est constante sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que $x \mapsto h(x)^2 - 2xh(x) - x^2$ est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel *c* tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x)^2 - 2xh(x) - x^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad \left(h(x) - x\right)^2 = 2x^2 + c \quad \Leftrightarrow \quad \left|h(x) - x\right| = \sqrt{2x^2 + c}.$$

Comme *h* doit être définie sur $\mathbb{R}$, on doit avoir $c \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) - x = \pm\sqrt{2x^2 + c}.$$

Comme *h* est continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto h(x) - x$ l'est aussi donc doit s'annuler pour changer de signe. Or :

- si $c > 0$, $x \mapsto \sqrt{2x^2 + c}$ ne s'annule jamais, donc $h : x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c}$ ou $h : x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c}$;
- si $c = 0$, on a $x \mapsto \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}|x|$ ne s'annule qu'en 0, et comme *h* doit être dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0, on a encore $h : x \mapsto (1+\sqrt{2})x$ ou $h : x \mapsto (1-\sqrt{2})x$.

Réciproquement, on vérifie que pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c}$, $x \mapsto (1+\sqrt{2})x$ et $x \mapsto (1-\sqrt{2})x$ sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ et ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions :} \\ \quad x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + c},\ x \mapsto x - \sqrt{2x^2 + c},\ x \mapsto (1+\sqrt{2})x \text{ et } x \mapsto (1-\sqrt{2})x \\ \text{avec } c \in \mathbb{R}_+.\end{array}}$$

Exercice 7

1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $i_1, i_2, \ldots, i_p, j_1, j_2, \ldots, j_p \in \mathbb{N}$ tels que les i_k sont distincts deux à deux et les j_k aussi, et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_{i_k, j_k} = 0.$$

On a donc pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x^{i_k} y^{j_k}=0$. En particulier, pour $y=1$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x^{i_k}=0$.

La fonction $x\mapsto\sum_{k=1}^{p}\lambda_k x^{i_k}$ est alors une fonction polynomiale nulle, donc tous ses coefficients sont nuls, soit :

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_p=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La famille } (f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \text{ est libre.}}$$

2) Les applications Δ et Φ sont linéaires par linéarité de la dérivation.

De plus, pour tous $i,j\in\mathbb{N}$, on a:

$$\Delta(f_{i,j})=\begin{cases} 0 & \text{si } i\le 1 \text{ et } j\le 1 \\ i(i-1)f_{i-2,j} & \text{si } i\ge 2 \text{ ou } j\le 1 \\ j(j-1)f_{i,j-2} & \text{si } i\le 1 \text{ ou } j\ge 2 \\ i(i-1)f_{i-2,j}+j(j-1)f_{i,j-2} & \text{si } i\ge 2 \text{ ou } j\ge 2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \Delta(f_{i,j})\in F.$$

Et :

$$\Phi(f_{i,j})=\begin{cases} 0 & \text{si } i=0 \text{ ou } j=0 \\ i(i-1)f_{i-1,j-1} & \text{si } i\ge 1 \text{ ou } j\ge 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \Phi(f_{i,j})\in F.$$

Donc, F est stable par Δ et Φ.

Ainsi :

$$\boxed{\Delta \text{ et } \Phi \text{ induisent des endomorphismes de } F.}$$

3) On a :

$$\ker\Phi\big|_F=\left\{f\in F \setminus \Phi(f)=0\right\}=\left\{f\in F \setminus \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0\right\}.$$

Or :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g(y) \quad\Rightarrow\quad f(x,y)=\varphi(x)+\psi(y).$$

Et, avec $f\in F$, on obtient $f(x)=P(x)+Q(y)$ avec $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, donc :

$$\boxed{\ker\Phi\big|_F=\left\{P+Q \setminus P,Q\in\mathbb{R}[x]\right\}}$$

Soit $f\in F$. Il existe $N\in\mathbb{N}^*$ et $(\lambda_{i,j})_{0\le i,j\le N}\in\mathbb{R}^{(N+1)^2}$ tels que $f=\sum_{0\le i,j\le N}\lambda_{i,j}f_{i,j}$.

On peut alors écrire pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\lambda_{0,0}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,0}f_{i,0}(x,y)+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{0,j}f_{0,j}(x,y)+\sum_{1\le i,j\le N}\lambda_{i,j}f_{i,j}(x,y) \\ &=\lambda_{0,0}+\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,0}x^i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{0,j}y^j+xy\sum_{0\le i,j\le N-1}\lambda_{i+1,j+1}x^iy^j \end{aligned}$$

En posant $h(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{i,0}x^i+\sum_{j=0}^{N}\lambda_{0,j}y^j$ et $g(x,y)=xy\sum_{0\le i,j\le N-1}\lambda_{i+1,j+1}x^iy^j$, on a :

$$f=h+g \quad \text{avec} \begin{cases} h\in \ker\Phi\big|_F \\ g\in G \end{cases}.$$

Donc :

$$\underline{F=\ker\Phi\big|_F+G}.$$

Soit $f\in\left(\ker\Phi\big|_F\right)\cap G$. On a alors pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=xy\,g(x,y)=P(x)+Q(y)$$

avec $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $g\in F$.

En particulier :

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x,0)=0=P(x)+Q(0)$ (avec $y=0$), donc P est constant ;
- pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f(0,y)=0=P(0)+Q(y)$ (avec $x=0$), donc Q est constant.

Ainsi, f est constante et s'annule, donc $f=0$ et :

$$\underline{\left(\ker\Phi\big|_F\right)\cap G=\{0\}}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{F=\ker\Phi\big|_F\oplus G}$$

<u>Exercice 8</u>

La fonction H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle. Le problème se pose en $(0,0)$.

En posant $\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$ avec $r\in\mathbb{R}_+$ et $t\in\mathbb{R}$ (coordonnées polaires), on a :

$$H(r\cos t,r\sin t)=\frac{r^2\cos t\sin t(r^2\cos^2 t-r^2\sin^2 t)}{r^2}=r^2\cos t\sin t(\cos^2 t-\sin^2 t)=r^2\cos t\sin t\cos(2t).$$

Donc, $|H(r\cos t,r\sin t)|\le r^2$, soit pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$|H(x,y)|\le x^2+y^2.$$

Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}H(x,y)=0=H(0,0).$$

Donc, H est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

En passant en coordonnées polaires comme plus haut, on obtient :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) = r\sin t(\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t - \sin^4 t).$$

Et :

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\right| \le r\left|\sin t\right|(\cos^4 t + 4\cos^2 t\sin^2 t + \sin^4 t) \le 6r.$$

Ainsi, pour tout $(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right| \le 6(x^2+y^2).$$

Et, comme plus haut, le théorème de gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 0.$$

Donc, $\frac{\partial H}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

En remarquant que $H(y,x) = -H(x,y)$, $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(y,x)$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial H}{\partial x}$ est, elle aussi, continue en $(0,0)$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

De plus, pour tout $(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4xy^3(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,0)=0$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,x)=1$, donc ;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,0) = 0 \ne 1 = \lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y).$$

Ainsi, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ n'admet pas de limite quand $(x,y)\to(0,0)$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ n'est pas de classe } C^2 \text{ en 0, donc sur } \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 9

1) Quitte à changer *f* en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), supposons que *f* admette un minimum local en $x_0\in U$. Alors, il existe $\varepsilon>0$ tel que $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset U$ (car U est ouvert) et pour tout $x\in\,]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $f(x_0)\le f(x)$. Ainsi :

$$x\in\,]x_0-\varepsilon,x_0[\;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g'(x_0) = f'(x_0)\le 0$$

$$x\in\,]x_0,x_0+\varepsilon[\;\Rightarrow\; \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d'(x_0) = f'(x_0)\ge 0$$

Finalement, on a $f'(x_0) \leq 0$ et $f'(x_0) \geq 0$, donc :

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Remarquons que cette question est une question de cours de première année.

2) *Cette question est une question de cours de deuxième année : le consulter pour la preuve.*
Si $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ est de classe C^1 sur *U*, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et admet un extremum local en (a, b), alors (a, b) est un point critique, autrement dit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

3) Rappelons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \operatorname{ch} y$$
$$\sin(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = -\frac{1}{i}\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \operatorname{sh} y$$

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x,y) = |\sin(x+iy)|^2 = |\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)|^2 = |\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y|^2$$
$$= \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x (1 + \operatorname{sh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y = \sin^2 x + (\sin^2 x + \cos^2 x)\operatorname{sh}^2 y$$

Soit :

$$f(x, y) = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y .$$

La fonction *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de telles fonctions.

Cherchons les points critiques sur l'ouvert $U = \overset{\circ}{\Omega} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 < 1\right\}$ en remarquant que si $(x, y) \in U$, alors $x^2 < x^2 + y^2 < 1$, donc $x \in \left]-1,1\right[\subset \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cos x \sin x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \text{ ou } \sin x = 0 \\ \operatorname{sh} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{car } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ y = 0 \end{cases}$$

Donc, le seul point critique est $(0, 0)$ et, d'après la question précédente, si *f* admet un extremum sur l'ouvert *U*, c'est en ce point. Or, $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$, donc 0 est un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ donc sur Ω. De plus, il n'y a pas d'autre extremum sur *U*.

Cherchons un éventuel extremum local sur la frontière de Ω, soit le cercle $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 = 1\right\}$.

Remarquons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(-x, -y) = f(x, -y) = f(-x, y) = f(x, y).$$

Donc si *f* admet un extremum local sur *C*, alors il est atteint plusieurs fois dont une fois sur le quart de cercle $C' = \left\{(x, y) \in [0,1]^2,\, x^2 + y^2 = 1\right\}$. Pour tout $(x, y) \in C'$, on a $x^2 + y^2 = 1$ et $y \geq 0$, donc $y = \sqrt{1 - x^2}$ et :

$$f(x, y) = g(x) = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2(\sqrt{1 - x^2}) .$$

La fonction g est définie et continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ avec :

$$g'(x) = 2\cos x \sin x + 2\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{ch}(\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{sh}(\sqrt{1-x^2}) = \sin(2x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{sh}(2\sqrt{1-x^2}).$$

Et pour tout $x \in \left]0,1\right[$:

$$g'(x) = 2x\left(\frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\mathrm{sh}(2\sqrt{1-x^2})}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = 2x\Big(\varphi(2x) - \psi(2\sqrt{1-x^2})\Big).$$

avec $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ et $\psi(t) = \dfrac{\mathrm{sh}\, t}{t}$.

Quand x décrit $\left]0,1\right[$, $2x$ et $2\sqrt{1-x^2}$ décrivent $\left]0,2\right[$. Les fonctions φ et ψ sont dérivables sur $\left]0,2\right[$ avec, pour tout $t \in \left]0,2\right[$:

$$\varphi'(t) = \frac{t\cos t - \sin t}{t^2} \quad \text{et} \quad \psi'(t) = \frac{t\,\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto t\cos t - \sin t$ et $t \mapsto t\,\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t$ sont dérivables sur $\left]0,2\right[$, de dérivées $t \mapsto -t\sin t$, strictement négative sur $\left]0,2\right[$ et $t \mapsto t\,\mathrm{sh}\, t$, strictement positive sur $\left]0,2\right[$. Donc :

- $t \mapsto t\cos t - \sin t$ est strictement décroissante sur $\left[0,2\right[$ et vaut 0 en 0, donc $t\cos t - \sin t < 0$ sur $\left]0,2\right[$ et ainsi, $\varphi'(t) < 0$ sur $\left]0,2\right[$, donc φ est strictement décroissante sur $\left]0,2\right[$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 1$.

  Ceci prouve que pour tout $t \in \left]0,2\right[$, $\varphi(t) < 1$, donc pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\varphi(2x) < 1$.

- $t \mapsto t\,\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t$ est strictement croissante sur $\left[0,2\right[$ et vaut 0 en 0, donc $t\,\mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t > 0$ sur $\left]0,2\right[$ et ainsi, $\psi'(t) > 0$ sur $\left]0,2\right[$, donc φ est strictement croissante sur $\left]0,2\right[$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\psi(t) = 1$.

  Ceci prouve que pour tout $t \in \left]0,2\right[$, $\psi(t) > 1$, donc pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\psi(2\sqrt{1-x^2}) > 1$.

Finalement, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $\varphi(2x) < 1 < \psi(2\sqrt{1-x^2})$, donc $g'(x) < 0$ et g est strictement décroissante sur $\left]0,1\right[$, donc sur $[0,1]$ par continuité.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, $g(1) \le g(x) \le g(0)$, soit :

$$0 < f(1,0) = \sin^2 1 \le f(x,\sqrt{1-x^2}) \le f(0,1) = \mathrm{sh}^2 1.$$

Remarquons enfin que pour tout $(x,y) \in \Omega \cap [0,1]^2$, on a $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, donc :

$$f(x,y) \le f(x,\sqrt{1-x^2}) \le f(0,1) = \mathrm{sh}^2 1$$

Par symétries, on obtient finalement $f(x,y) \le f(0,1) = \mathrm{sh}^2 1$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, donc sur Ω, f admet $\mathrm{sh}^2 1$ pour maximum global atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Remarquons enfin que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x,0) = \sin^2 x \le \sin^2 1 = f(1,0)$, donc $\sin^2 1 = f(1,0)$ n'est pas un minimum local.

Finalement :

Sur Ω, f admet un minimum global 0, atteint en $(0,0)$ et un maximum global $\mathrm{sh}^2 1$, atteint en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Exercice 10

Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=f(tx,ty,tz)$.

Comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$, *g* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et avec la règle de la chaine, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d(tx)}{dt}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+\frac{d(ty)}{dt}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+\frac{d(tz)}{dt}\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz) \\ &= x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+z\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)\end{aligned}$$

Donc, $g'(1)=x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

On veut prouver que :

$\big(f$ est α-positivement homogène$\big)$

$$\Leftrightarrow\quad\left(\exists\,\alpha\in\mathbb{R},\ \forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z)\right)$$

($\Rightarrow$) On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^\alpha f(x,y,z)$.

Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ fixé. On a, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda)=f(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\lambda^\alpha f(u,v,w)$, donc :

$$g'(\lambda)=u\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+v\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+w\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\alpha\lambda^{\alpha-1}f(u,v,w).$$

En multipliant par λ, on obtient :

$$\lambda u\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+\lambda v\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)+\lambda w\frac{\partial f}{\partial z}(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=\alpha\lambda^{\alpha}f(u,v,w)=\alpha f(\lambda u,\lambda v,\lambda w).$$

Ceci est vrai pour tout $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, donc en posant $(\lambda u,\lambda v,\lambda w)=(x,y,z)$, on obtient pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z).$$

($\Leftarrow$) On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\alpha f(x,y,z).$$

Alors, à $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ fixé, on a pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)+tz\frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)=tg'(t)=\alpha f(tx,ty,tz)=\alpha g(t).$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle $ty'-\alpha y=0$, qui se récrit sur $\mathbb{R}_+^*$, $y'-\dfrac{\alpha}{t}y=0$.

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $t\mapsto K\exp\left(\displaystyle\int^t\frac{\alpha}{u}du\right)=Kt^\alpha$ avec K constante réelle.

Ainsi, il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, $g(\lambda)=f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=K\lambda^\alpha$.

En évaluant en $\lambda = 1$, on obtient $g(1) = f(x, y, z) = K$ et donc pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$g(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)\,.$$

Finalement, on a établi que pour *f* de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\big(f \text{ est } \alpha\text{-positivement homogène}\big)\\ &\qquad\Leftrightarrow \left(\exists\,\alpha \in \mathbb{R},\ \forall\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z)\right)\end{aligned}}$$