TD du chapitre 15 : Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P\,|\,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k)$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'on ait ainsi défini un produit scalaire.

Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.

2) On pose pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k=\dfrac{\prod_{i\in[\![0,n]\!],\, i\neq k}(X-a_i)}{\prod_{i\in[\![0,n]\!],\, i\neq k}(a_k-a_i)}$ (*polynômes de Lagrange*).

   Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ (muni du produit scalaire défini ci-dessus).

3) Calculer $\inf\limits_{P\in F}\left(\sum_{k=0}^{n}P(a_k)^2\right)$ avec $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\setminus\sum_{k=0}^{n}P(a_k)=1\right\}$.

Exercice 2

Soit $\varphi\in C([-1;1],\mathbb{R}_+^*)$. On pose $E=\mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(P,Q)\mapsto(P\,|\,Q)=\int_{-1}^{1}PQ\varphi$ est un produit scalaire sur *E*.

Dans la suite, on munit *E* de ce produit scalaire.

2) Prouver qu'il existe une unique base orthonormée de *E*, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.
3) Dans cette question, on prend φ constante égale à 1 et on pose pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$Q_k=\frac{d^k}{dX^k}\left[(X^2-1)^k\right]\ (\textit{polynôme de Legendre}).$$

   a. Déterminer pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, le degré et le coefficient dominant de Q_k.

   b. En déduire que la famille $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de *E*.

   c. Montrer que la famille $(Q_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthogonale de *E*.

Exercice 3

Soit *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, vérifiant l'identité du parallélogramme.

Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice 4

Soit *E* un espace euclidien de dimension $n>1$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de *E* et $(x_1, x_2, \dots, x_n)\in E^n$.
Montrer que :

$$\left|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)\right|\leq\|x_1\|.\|x_2\|\dots\|x_n\|\quad(\textit{Inégalité de Hadamard}).$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien réel et f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que pour tout $(x,y)\in E^2$:

$$(x\mid y)=0 \Rightarrow \big(f(x)\mid f(y)\big)=0 .$$

Montrer qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=k\|x\|$.

Exercice 6

Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}=(x_1,x_2,\dots,x_p)$ une famille de p vecteurs de E. On note $G=G(x_1,x_2,\dots,x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(x_i\mid x_j)$, appelée *matrice de Gram* de la famille $\mathcal{F}$ et $A=M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

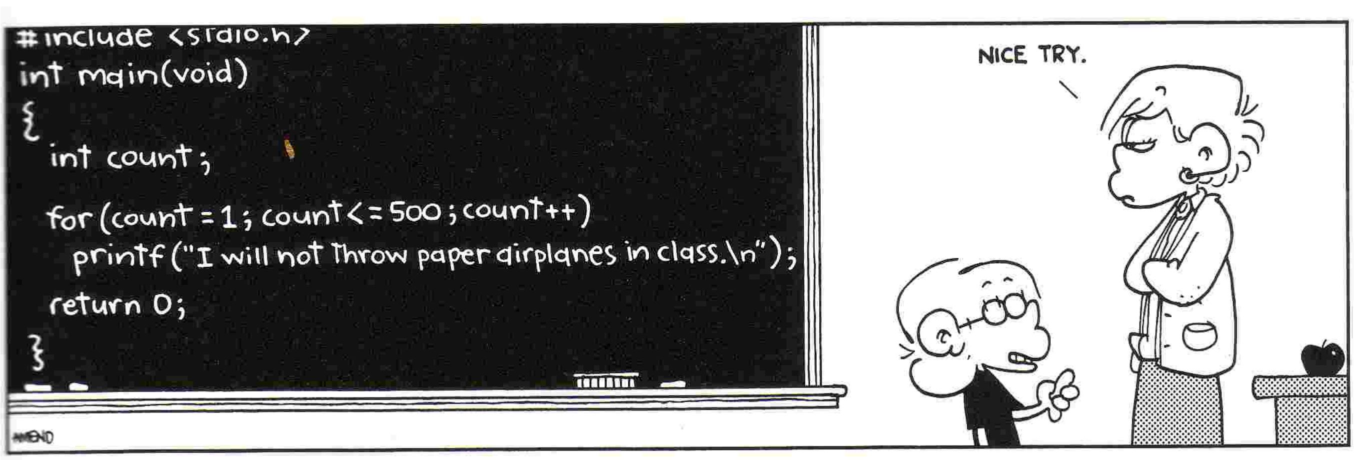
1) Comparer $rg(A)$ et $rg(\mathcal{F})$.
2) Montrer que $G={}^tAA$.
3) Prouver que $\ker({}^tAA)=\ker A$ et en déduire que $rg(\mathcal{F})=rg(G)$.
4) Prouver que $\det G\geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\det G=0$?
5) Soit F un sous-espace de E muni d'une base $(e_1,e_2,\dots,e_p)$ et x un vecteur de E. Montrer que :

$$d(x,F)^2=\frac{\det G(e_1,e_2,\dots,e_p,x)}{\det G(e_1,e_2,\dots,e_p)} .$$

Exercice 7

Soit $f\in C([0;1],\mathbb{R}_+)$. Montrer que :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right)\leq \int_0^1 f(x)^3 dx .$$



Exercice 8 (*Mines*)

On pose pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$:

$$\phi(P)=(X^2-1)P''+(2X+1)P' .$$

1) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}P(t)Q(t)\,dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}[X]^2$ et munit $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.

2) Montrer que ϕ est symétrique pour ce produit scalaire.

3) Justifier que ϕ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et montrer que cet endomorphisme induit est diagonalisable et que l'on peut former une base orthogonale de vecteurs propres $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ telle que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$.

Exercice 9 (*X-ENS*)

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2$ existe.

1) Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\,dt$ est bien définie et munit E d'un produit scalaire.

Soient $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = \left(\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que Q_r soit inversible.

2) Montrer que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive.

3) Prouver que $\varphi_{r+1} \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ si et seulement si Q_{r+1} est non inversible.

4) On suppose que pour tout $(i,j,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\langle \varphi_{i+k}, \varphi_{j+k}\rangle = \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle$ et Q_{r+1} non inversible. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.