

TD du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien
Exercice 1

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$.

Montrer que f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A , est un projecteur orthogonal.

Exercice 2

Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous f, g de E , on pose :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

On pose par ailleurs :

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \mid f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \text{ et } f'' = f\}.$$

- Montrer que $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ définit un produit scalaire sur E .
- Prouver que V et W sont des sous-espaces supplémentaires dans E et orthogonaux pour le produit scalaire ci-dessus.
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- s est une symétrie orthogonale (i.e. $G = F^\perp$) ;
- s est un automorphisme orthogonal ;
- s est un endomorphisme symétrique.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une matrice triangulaire supérieure R (« right triangular ») telles que $A = QR$ (Décomposition QR). Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

☺ On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $O(n)$ est-il convexe ?

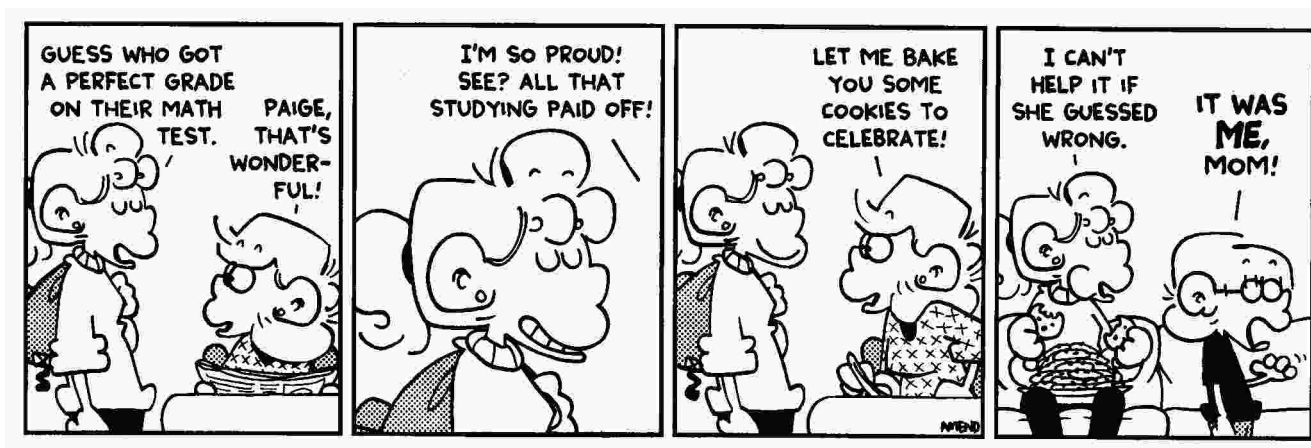
Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ${}^t U_k U_k = 1$ et $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k {}^t U_k$.

Exercice 7

On dit qu'une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$ (tXAX est une matrice carrée 1×1 que l'on identifie à son unique coefficient). On dit que A est définie positive si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$.

- 1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que A est positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels positifs.
 - b. Montrer que A est définie, positive si et seulement si ses valeurs propres sont des réels strictement positifs.
- 2) Montrer que la matrice de Hilbert $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = {}^tAA$.
 - a. Prouver que S est une matrice symétrique positive.
 - b. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. La matrice A est-elle unique ?
 - c. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
 - d. Montrer que $rg(A) = rg(S)$.
- 4) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
- 5) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

**Exercice 8 (Centrale)**

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

On veut montrer qu'il existe $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = ADB$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs.

- 1) Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tP^tMMP = D^2$ où D est une matrice diagonale à coefficient diagonaux tous strictement positifs, que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- 2) On note V_1, \dots, V_n les colonnes de MP et appelle Q la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les $\frac{1}{\lambda_1}V_1, \dots, \frac{1}{\lambda_n}V_n$. Prouver que Q est une matrice orthogonale et conclure.

Exercice 9 (Mines)

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E , un espace euclidien.

- 1) Montrer qu'un sous-espace F de E est stable par $f \in O(E)$ si et seulement si F^\perp l'est aussi.
- 2) Montrer que, si $f \in O(E)$, $E = \text{Im}(f - id_E) \oplus \text{ker}(f - id_E)$ et que cette somme est orthogonale.
- 3) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et (u_1, \dots, u_p) une famille libre de vecteurs de E . Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note s_{u_k} la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u_k)^\perp$. Montrer que $\text{Im}(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p} - id_E) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

