

TD du chapitre 19 : Fonctions de plusieurs variables
Exercice 1

1) Soit $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 .

Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont différents.

2) Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2

Dans les cas suivants, montrer que f ou g est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

1) $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} ; P \mapsto \int_0^1 P^2$.

2) $f : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; A \mapsto A^{-1}$.

3) $f : E \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto (x | u(x))$ où E est un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique de E .

Puis $g : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{(x | u(x))}{(x | x)}$.

On montrera que $dg(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u .

Exercice 3

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue en a , $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue en b et $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $(u(a), v(b))$.

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto f(x, y) = \phi(u(x), v(y))$ admet un maximum local en (a, b) .

Exercice 4

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Exercice 5

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1) Soit $g : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$. Montrer que $g \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}.$$

- 2) On définit sur \mathbb{R}_+ l'application $\Phi: r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.
- 3) En déduire que si f possède un extremum local en $(0,0)$, alors f est constante au voisinage de $(0,0)$.

Exercice 6

1) Résoudre le système
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - y \end{cases}.$$

- 2) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle non linéaire (E) : $x + y + (x - y)y' = 0$.

Exercice 7

On appelle E l'espace des fonctions de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R} .

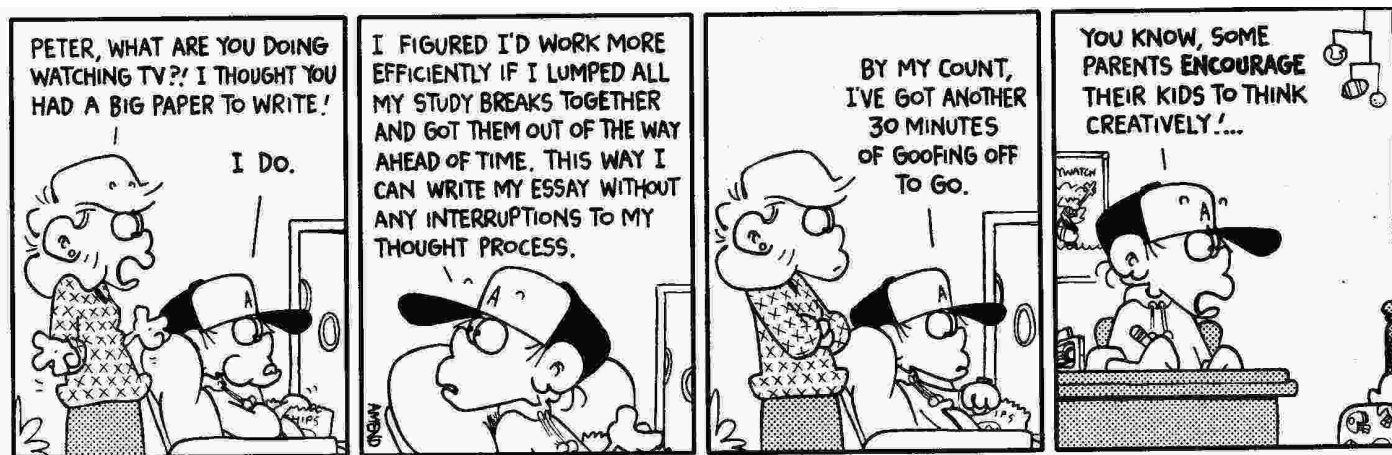
On définit sur E les applications Δ et Φ par :

$$\Delta: f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad \Phi: f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Enfin, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on note $f_{i,j}: (x, y) \mapsto x^i y^j$.

- 1) Montrer que la famille $(f_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est libre. On note F le sous-espace de E engendré par cette famille.
- 2) Montrer que Δ et Φ induisent des endomorphismes de F .
- 3) Déterminer le noyau de la restriction de Φ à F . Montrer que c'est un supplémentaire (dans F) de :

$$G = \{(x, y) \mapsto xy f(x, y) \mid f \in F\}.$$



Exercice 8 (Mines)

Soit la fonction H définie par $H(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $H(0, 0) = 0$.

Cette fonction est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ? de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 9 (Mines)

Soit f une fonction dérivable sur U , un ouvert de \mathbb{R} , et à images dans \mathbb{R} .

- 1) Montrer que si f admet un extremum local en $x_0 \in U$, alors $f'(x_0) = 0$.
- 2) Donner un théorème équivalent lorsque U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et le démontrer.
- 3) Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto |\sin(x + iy)|^2$ sur $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 10 (Centrale)

On dit qu'une application f , continue de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , est α -positivement homogène s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^\alpha f(x, y, z)$.

Soit f de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 .

Montrer que f est α -positivement homogène si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \alpha f(x, y, z).$$

☺ On pourra dériver par rapport à λ , à x , y et z constants et utiliser des changements de variable du type $u = \lambda x$.

