Corrigé du DM n° 8

A - Préliminaire

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

La fonction *f* est de classe C^∞ sur $\left]-1,1\right[$ et, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)...\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)...\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3\times 5\times ...\times(2n-1)}{2^n}\frac{1}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^n \times 2\times 4\times ...\times(2n)}\frac{1}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{1}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Comme *f* est C^∞ sur $\left]-1,1\right[$, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre *n*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui donne pour tout $x \in \left]-1,1\right[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(2k)!}{2^{2k}k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!}\frac{1}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\frac{(2k)!}{k!k!} x^k + \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}n!(n+1)!}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \left]-1,1\right[$:

$$u(t) = \frac{x-t}{1-t} = 1 + \frac{1-x}{t-1}.$$

Comme $1-x>0$ et $t-1<0$, u est décroissante sur $\left]-1,1\right[$, donc :

- si $x \geq 0$, on a $0 = u(x) \leq u(t) \leq u(0) = x$ pour tout $t \in [0,x]$, et :

$$0 \leq \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt \leq x^n \left|\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right|.$$

- si $x \leq 0$, on a $x = u(0) \leq u(t) \leq u(x) = 0$ pour tout $t \in [0,x]$, et :

$$0 \leq \left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right| \leq |x|^n \left|\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right|.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\left|\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right| \leq |x|^n \left|\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt\right|$, donc :

$$I(x) = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n (1-t)^{-\frac{3}{2}}\,dt = \underset{n\to+\infty}{O}\left(x^n\right).$$

Par ailleurs, avec la formule de Stirling, on obtient :

$$\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n+1)}\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}{2^{2n+1}2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n+1}e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)}}{e\sqrt{2\pi}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi :

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^k = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}I(x) \text{ avec } \begin{cases} I(x) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(x^n\right) \\ \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \end{cases}.$$

Comme $|x|<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x^n\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}\right)=0$ par croissances comparées et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^k\right)=0.$$

Ainsi, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n}$$

B - Identité de Karamata

2. Comme $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}f(x)=\sqrt{\pi}$ et $x^{p+1}\xrightarrow[x\to1^-]{}1^-$, on a :

$$\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x^{p+1}}f(x^{p+1})=\sqrt{\pi}.$$

Or, $\sqrt{1-x^{p+1}}=\sqrt{1-x}\sqrt{1+x+...+x^p}$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1+x+...+x^p}=\sqrt{p+1}$, donc :

$$\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}f(x^{p+1})=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x^{p+1}}f(x^{p+1})}{\sqrt{1+x+...+x^p}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}.$$

Avec $x\in\left]-1,1\right[$, on a $x^{p+1}\in\left]-1,1\right[$, donc $f(x^{p+1})=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k(x^{p+1})^k=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^{(p+1)k}$, et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^{(p+1)k}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}}$$

3. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus :

- $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\underset{t\to0}{\sim}\frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0\frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, donc $\int_0\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}dt$ converge ;
- $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}=\underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t})$ (avec $e^{-t}>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$) et $\int^{+\infty}e^{-t}dt$ converge, donc $\int^{+\infty}\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}dt$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt \text{ converge.}}$$

La fonction $t \mapsto (p+1)t$ est de classe C^1 et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc effectuer le changement de variable $u=(p+1)t$ dans l'intégrale ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{\frac{1}{p+1}u}} \frac{1}{p+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\,.$$

Et avec $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\pi}$, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$, on a immédiatement :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt}$$

4. Soit $Q=\sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. Sous réserve de convergence, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i e^{-it}\right)dt = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} b_i \frac{e^{-(i+1)t}}{\sqrt{t}}\right)dt\,.$$

Or, pour tout $i\in [\![0,n]\!]$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(i+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$ converge, et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(i+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \sum_{i=0}^{n} b_i\left[\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(i+1)k}\right] = \lim_{x\to 1^-}\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{1-x}\,a_k b_i x^{(i+1)k}\right].$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1-x}\,a_k b_i x^{(i+1)k}\right] = \lim_{x\to 1^-}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\sqrt{1-x}\,a_k x^k \sum_{i=0}^{n} b_i (x^k)^i\right]$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt = \lim_{x\to 1^-}\left[\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k)\right]}$$

5. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a $e^{-t}\in\,]0,1[$ et $e^{-t}\le e^{-1}$ si et seulement si $t\ge 1$. Alors, pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}h(e^{-t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t>1 \\ \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{t} = \dfrac{1}{\sqrt{t}} & \text{si } 0<t\le 1 \end{cases}$$

Comme $\int_0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge avec :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})dt = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2.$$

Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})dt \text{ converge et vaut 2.}}$$

6. Soit $x \in [0,1[$. On a donc $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = 0$, donc à partir d'un certain rang, $0 \leq x^k < e^{-1}$, donc $h(x^k) = 0$.

Ceci implique que la suite $\left(a_k x^k h(x^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, donc que :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_k x^k h(x^k) \text{ converge.}}$$

7. On a donc pour tout $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k h(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})dt = 2$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{-\frac{1}{n}} \in [0,1[$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1^-$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) = 2.$$

Or :

$$e^{-t} h(e^{-t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ 1 & \text{si } 0 < t \leq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } 0 < k \leq n \end{cases}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Et :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^{n} a_k = 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}}}.$$

Or, $e^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}}$$

C - Théorème taubérien

8. On a $0<\alpha<1<\beta$ et $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n-\lfloor \alpha n\rfloor\neq 0$ et $n-\lfloor \beta n\rfloor\neq 0$. On a :

$$\begin{cases}\alpha<1 \ \Rightarrow\ \alpha n<n \ \Rightarrow\ \lfloor \alpha n\rfloor<n\\ 1<\beta \ \Rightarrow\ n<\beta n \ \Rightarrow\ \lfloor n\rfloor=n\leq\lfloor \beta n\rfloor \ \Rightarrow\ n<\lfloor \beta n\rfloor \text{ avec } n-\lfloor \beta n\rfloor\neq 0\end{cases}$$

Donc :

$$\frac{S_n-S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{n-\lfloor \alpha n\rfloor}=\frac{\sum\limits_{k=\lfloor \alpha n\rfloor+1}^{n}a_k}{n-\lfloor \alpha n\rfloor} \quad\text{et}\quad \frac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor \beta n\rfloor-n}=\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\lfloor \beta n\rfloor}a_k}{\lfloor \beta n\rfloor-n}.$$

Et comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\left(n-\lfloor \alpha n\rfloor\right)a_n=\sum_{k=\lfloor \alpha n\rfloor+1}^{n}a_n\leq\sum_{k=\lfloor \alpha n\rfloor+1}^{n}a_k \quad\text{et}\quad \sum_{k=n+1}^{\lfloor \beta n\rfloor}a_k\leq\sum_{k=n+1}^{\lfloor \beta n\rfloor}a_{n+1}\leq\sum_{k=n+1}^{\lfloor \beta n\rfloor}a_n=\left(\lfloor \beta n\rfloor-n\right)a_n.$$

Avec $n-\lfloor \alpha n\rfloor>0$ et $\lfloor \beta n\rfloor-n>0$, on obtient :

$$a_n\leq\frac{\sum\limits_{k=\lfloor \alpha n\rfloor+1}^{n}a_k}{n-\lfloor \alpha n\rfloor} \quad\text{et}\quad \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\lfloor \beta n\rfloor}a_k}{\lfloor \beta n\rfloor-n}\leq a_n.$$

Soit :

$$\boxed{\frac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor \beta n\rfloor-n}\leq a_n\leq\frac{S_n-S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{n-\lfloor \alpha n\rfloor}}$$

9. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\gamma n-1<\lfloor \gamma n\rfloor\leq\gamma n \quad\Rightarrow\quad \gamma-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor \gamma n\rfloor}{n}\leq\gamma$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\gamma-\dfrac{1}{n}\right)=\gamma$, le théorème de gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lfloor \gamma n\rfloor}{n}=\gamma>0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\lfloor \gamma n\rfloor}=\frac{1}{\gamma}}$$

Par hypothèse, $S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$, donc $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}\to 2$. Comme $\gamma>0$, donc $\lfloor \gamma n\rfloor\to+\infty$, on a $\dfrac{S_{\lfloor \gamma n\rfloor}}{\sqrt{\lfloor \gamma n\rfloor}}\to 2$ et :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{\lfloor \gamma n\rfloor}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{\lfloor \gamma n\rfloor}}{\sqrt{\lfloor \gamma n\rfloor}}\sqrt{\frac{\lfloor \gamma n\rfloor}{n}}=2\sqrt{\gamma}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{\lfloor \gamma n\rfloor}}{\sqrt{n}}=2\sqrt{\gamma}}$$

10. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après ce qui précède :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\beta} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\lfloor \beta n\rfloor} = \dfrac{1}{\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor \beta n\rfloor - n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\lfloor \beta n\rfloor}{n}-1} = \frac{2\sqrt{\beta}-2}{\beta-1} = \frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\alpha} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\lfloor \alpha n\rfloor} = \dfrac{1}{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{S_n-S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{n-\lfloor \alpha n\rfloor} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} - \dfrac{S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{\sqrt{n}}}{1-\dfrac{\lfloor \alpha n\rfloor}{n}} = \frac{2-2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} = \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}.$$

Donc, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n}\,\dfrac{S_n-S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{n-\lfloor \alpha n\rfloor} \leq \dfrac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}+\varepsilon$;
- $n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1}-\varepsilon \leq \sqrt{n}\,\dfrac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor \beta n\rfloor-n}$.

Alors, pour tout entier $n \geq N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1}-\varepsilon \leq \sqrt{n}\,\frac{S_{\lfloor \beta n\rfloor}-S_n}{\lfloor \beta n\rfloor-n} \leq \sqrt{n}a_n \leq \sqrt{n}\,\frac{S_n-S_{\lfloor \alpha n\rfloor}}{n-\lfloor \alpha n\rfloor} \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}+\varepsilon .$$

Et ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$\boxed{\frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1}-\varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}+\varepsilon}$$

11. Rappelons que le résultat ci-dessus est vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < 1 < \beta$.

Or :

$$\lim_{\beta\to 1} \frac{2(\sqrt{\beta}-1)}{\beta-1} = \lim_{\beta\to 1} \frac{2}{\sqrt{\beta}+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to 1} \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} = \lim_{\alpha\to 1} \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} = 1 .$$

Comme $\sqrt{n}a_n$ ne dépend ni de α et β , on peut faire tendre α et β vers 1 dans la double inégalité de la question précédente, ce qui donne, pour tout entier $n \geq N$:

$$1-\varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq 1+\varepsilon .$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$:

$$1-\varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq 1+\varepsilon .$$

Ceci prouve par définition que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}a_n = 1}$$

D - Marche aléatoire

12. Soit un entier $n \geq 2$, $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $(i_1, \dots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$.

Comme les X_i sont indépendantes, on a :

$$P(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = P(X_{k+1} = i_1) \dots P(X_n = i_{n-k}).$$

Comme les X_i suivent la même loi, on a pour tout $a \in [\![1, n-k]\!]$, $P(X_{k+a} = i_a) = P(X_a = i_a)$, donc :

$$P(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = P(X_1 = i_1) \dots P(X_{n-k} = i_{n-k}).$$

Et à nouveau grâce à l'indépendance des X_i, on obtient :

$$\boxed{P(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = P(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k})}$$

13. On a toujours un entier $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Considérons l'application θ, de $\mathbb{Z}^{n-k}$ dans $\mathbb{Z}^{n-k}$ telle que pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$:

$$\theta((z_1, z_2, \dots, z_{n-k})) = (z_1, z_1 + z_2, \dots, z_1 + z_2 + \dots + z_{n-k}).$$

Pour tout $(y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$, on a :

$$\theta((z_1, z_2, \dots, z_{n-k})) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \iff \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_1 + z_2 = y_2 \\ z_1 + z_2 + z_3 = y_3 \\ \quad \vdots \\ z_1 + z_2 + \dots + z_{n-k} = y_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - y_1 \\ z_3 = y_3 - y_2 \\ \quad \vdots \\ z_{n-k} = y_{n-k} - y_{n-k-1} \end{cases}$$

Ceci prouve que θ est bijective de $\mathbb{Z}^{n-k}$ dans $\mathbb{Z}^{n-k}$, de réciproque :

$$\theta^{-1} : \mathbb{Z}^{n-k} \to \mathbb{Z}^{n-k} \quad ; \quad (y_1, y_2, \dots, y_{n-k}) \mapsto (y_1, y_2 - y_1, \dots, y_{n-k} - y_{n-k-1}).$$

Soit alors $(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$. On a :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} - S_k = j_1, S_{k+2} - S_k = j_2, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) &= P(X_{k+1} = j_1, X_{k+1} + X_{k+2} = j_2, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n = j_{n-k}) \\ &= P(\theta(X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) = (j_1, \dots, j_{n-k})) \\ &= P((X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) = \theta^{-1}(j_1, \dots, j_{n-k})) \\ &= P((X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n) = (j_1, j_2 - j_1, \dots, j_{n-k} - j_{n-k-1})) \\ &= P(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \end{aligned}$$

Alors, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} - S_k = j_1, S_{k+2} - S_k = j_2, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) &= P(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\ &= P((X_1, X_2, \dots, X_{n-k}) = (j_1, j_2 - j_1, \dots, j_{n-k} - j_{n-k-1})) \\ &= P((X_1, X_2, \dots, X_{n-k}) = \theta^{-1}(j_1, \dots, j_{n-k})) \\ &= P(\theta(X_1, X_1, \dots, X_{n-k}) = (j_1, \dots, j_{n-k})) \\ &= P(X_1 = j_1, X_1 + X_2 = j_2, \dots, X_1 + \dots + X_{n-k} = j_{n-k}) \\ &= P(S_1 = j_1, S_2 = j_2, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien pour tous $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $k\in[\![1,n-1]\!]$ et $(j_1,\dots,j_{n-k})\in\mathbb{Z}^{n-k}$:

$$\boxed{P\left(S_{k+1}-S_k=j_1, S_{k+2}-S_k=j_2,\dots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)=P\left(S_1=j_1,S_2=j_2,\dots,S_{n-k}=j_{n-k}\right)}$$

14. On considère $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$. Remarquons déjà que :

$$E_{n-k}=(T>n-k)=\begin{cases}(T>0)=\Omega & \text{si } k=n\\ \bigcap_{i=1}^{n-k}(S_i\neq 0) & \text{si } k<n\end{cases}$$

On a :

$$P(A_n^n)=P(S_n=0)=P(S_n=0)P(\Omega)=P(S_n=0)P(E_0).$$

Et, si $k<n$:

$$P(A_k^n)=P\left((S_k=0)\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i\neq 0)\right)=P(S_k=0)P_{(S_k=0)}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i\neq 0)\right)=P(S_k=0)P_{(S_k=0)}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i-S_k\neq 0)\right).$$

Or, $S_k=X_1+\dots+X_k$ et pour tout $i\in[\![k+1,n]\!]$, $S_i-S_k=X_{k+1}+\dots+X_i$. Comme les X_a sont indépendantes, S_k et S_i-S_k sont indépendantes pour tout $i\in[\![k+1,n]\!]$ et donc :

$$\begin{aligned}P_{(S_k=0)}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i-S_k\neq 0)\right)&=P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i-S_k\neq 0)\right)\\&=\sum_{(j_1,\dots,j_{n-k})\in(\mathbb{Z}^*)^{n-k}}P\left(S_{k+1}-S_k=j_1,S_{k+2}-S_k=j_2,\dots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)\end{aligned}$$

Et, d'après la question précédente :

$$P\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i-S_k\neq 0)\right)=\sum_{(j_1,\dots,j_{n-k})\in(\mathbb{Z}^*)^{n-k}}P\left(S_1=j_1,S_2=j_2,\dots,S_{n-k}=j_{n-k}\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n-k}(S_i\neq 0)\right)=P(E_{n-k}).$$

Finalement, si $k<n$, on a aussi la formule désirée et donc, dans tous les cas :

$$\boxed{P(A_k^n)=P(S_k=0)P(E_{n-k})}$$

15. On veut $\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0)P(E_{n-k})=1$, soit $\sum_{k=0}^{n}P(A_k^n)=1$ d'après ce qui précède.

Or, pour tous $k,k'\in[\![0,n]\!]$ tels que $k<k'<n$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}A_k^n=(S_k=0)\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i\neq 0)\subset(S_{k'+1}\neq 0)\\ A_{k'}^n=(S_{k'}=0)\cap\bigcap_{i=k'+1}^{n}(S_i\neq 0)\subset(S_{k'+1}=0)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad A_k^n\cap A_{k'}^n=\varnothing.$$

Et :

$$\left.\begin{array}{l}A_k^n=(S_k=0)\cap\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i\neq 0)\subset(S_n\neq 0)\\ A_n^n=(S_n=0)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad A_k^n\cap A_n^n=\varnothing.$$

Les A_k^n sont donc disjoints deux à deux.

De plus, pour tout $\omega\in\Omega$, posons $B=\left\{k\in[\![0,n]\!],\omega\in(S_k=0)\right\}$.

- Si $B=\varnothing$, alors $\omega\in A_0^n=\bigcap_{i=1}^{n}(S_i\neq 0)$.
- Si $B\neq\varnothing$, alors $\omega\in A_m^n$ avec $m=\max B$.

Ainsi, pour tout $\omega\in\Omega$, $\omega\in\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]}A_k^n$ et donc $\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]}A_k^n=\Omega$.

Finalement, la famille $\left(A_k^n\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'évènements, donc $\sum_{k=0}^{n}P(A_k^n)=1$, soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0)P(E_{n-k})=1}$$

Remarquons que $P(S_0=0)=P(E_0)=1$, donc la formule ci-dessus est bien valable aussi pour $n=0$/

16. Soit $x\in\left]0,1\right[$.

Les séries $\sum P(S_n=0)x^n$ et $\sum P(E_n)x^n$ sont absolument convergentes car la série $\sum x^n$ converge et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|P(S_n=0)x^n\right|=P(S_n=0)x^n\leq x^n \text{ et } \left|P(E_n)x^n\right|=P(E_n)x^n\leq x^n.$$

On peut donc appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}P(S_k=0)P(E_{n-k})\right)x^n.$$

Avec la question précédente, on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n.$$

Soit :

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n\right)=\frac{1}{1-x}}$$

17. On a $P(S_0=0)=1$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

On cherche $P(S_n=0)=P(X_1+...+X_n=0)$ avec $X_k(\Omega)=\{-1,1\}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

- Si $n=2p+1$ est impair, alors $S_n=X_1+...+X_n$ ne peut être égal à 0, donc :
$$P(S_n=0)=0.$$
- Si $n=2p$ est pair, alors $X_1+...+X_{2p}=0$ si et seulement si p variables X_k parmi $X_1,...,X_{2p}$ valent 1 et les autres valent – 1. Il y a $\binom{2p}{p}$ façons de choisir les p variables X_k valant 1 (les p autres valant – 1) et la probabilité de $(X_k=1)$ (*resp.* $(X_k=-1)$) est ½, donc :
$$P(S_n=0)=\binom{2p}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{1}{2}\right)^{2p-p}=\binom{2p}{p}\frac{1}{4^p}.$$

Remarquons que la formule ci-dessus reste valable pour $n=0$ (qui est pair avec $p=0$).

Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(S_{2p}=0)=\dbinom{2p}{p}\dfrac{1}{4^p} \\ P(S_{2p+1}=0)=0 \end{array}}$$

18. Soit $x\in\left]0,1\right[$ (donc $x^2\in\left]0,1\right[$).

D'après ce qui précède et la question 1, on a immédiatement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n=\sum_{p=0}^{+\infty}P(S_{2p}=0)x^{2p}=\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{2p}{p}\frac{1}{4^p}(x^2)^p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Alors :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n\right)=\frac{1}{1-x}\iff\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n\right)=\frac{1}{1-x}\iff\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}.$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}P(E_n)x^n=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

19. Rappelons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $E_n=(T>n)=(T\geq n+1)=(T=n+1)\bigcup(T\geq n+2)$ et $E_{n+1}=(T\geq n+2)$, donc $E_{n+1}\subset E_n$ et la suite $\left(P(E_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive et i en va de même pour $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}P(E_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

De plus, si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}P(E_n)x^n$, on a :

$$\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\,f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\lim_{x\to1^-}\sqrt{1+x}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{\pi}.$$

Donc, d'après la partie **B** :

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}P(E_k)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{n}.$$

Ainsi, la suite $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}P(E_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses de la partie **C**, donc :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}P(E_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{P(E_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}}$$

20. On a $E_n = (T > n)$ et $(T = +\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (T > n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_{n+1} \subset E_n$, on peut utiliser la continuité décroissante :

$$P(T = +\infty) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) .$$

Et, comme $P(E_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}} = 0$, on obtient :

$$\boxed{P(T = +\infty) = 0}$$

21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T > n) = (T = n+1) \cup (T > n+1)$ et cette union est disjointe, donc :

$$P(T > n) = P(T = n+1) + P(T > n+1) \quad \Leftrightarrow \quad P(T = n+1) = P(T > n) - P(T > n+1) = P(E_n) - P(E_{n+1}) .$$

Alors, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N+1} P(T = n)x^n &= \sum_{n=0}^{N} P(T = n+1)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} \left[P(E_n) - P(E_{n+1})\right] x^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} P(E_n)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} P(E_{n+1})x^{n+1} \\ &= x\sum_{n=0}^{N} P(E_n)x^n - \sum_{n=1}^{N+1} P(E_n)x^n = x\sum_{n=0}^{N} P(E_n)x^n - \sum_{n=0}^{N+1} P(E_n)x^n + P(E_0)\end{aligned}$$

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ et $P(E_0) = 1$, donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n)x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n + 1 = (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 1 - \sqrt{(1-x)^2\frac{1+x}{1-x}} = 1 - \sqrt{(1-x)(1+x)} .$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2}}$$

21. On a vu dans la question **1** que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n} x^n$.

Alors, pour tout $x \in [0,1[$, on a $x^2 \in [0,1[$ et :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(x^2)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(x^2)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(x^2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1}(x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\left[\binom{2n}{n} - 4\binom{2n-2}{n-1}\right] x^{2n}\end{aligned}$$

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2} = \frac{n^2(2n)!}{2n(2n-1)\left(n!\right)^2} = \frac{n(2n)!}{2(2n-1)\left(n!\right)^2} = \frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}.$$

Donc :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\left[\binom{2n}{n} - 4\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}\right]x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[1 - \frac{2n}{2n-1}\right]\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n)x^n = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^{2n}.$$

Et par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=2n-1)=0$ et :

$$\boxed{P(T=2n) = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$$