

**Corrigé du DM n° 9**
**A - Une propriété de Perron-Frobenius**

1) On a  $H_n = (h_{i,j}^{(n)})_{0 \leq i, j \leq n-1} = \left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$h_{j,i}^{(n)} = \frac{1}{j+i+1} = \frac{1}{i+j+1} = h_{i,j}^{(n)}.$$

Donc,  $H_n$  est une matrice symétrique réelle.

De plus, pour tout  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  $H_n X = \left( \sum_{j=0}^{n-1} h_{0,j}^{(n)} x_j \ \sum_{j=0}^{n-1} h_{1,j}^{(n)} x_j \ \dots \ \sum_{j=0}^{n-1} h_{n-1,j}^{(n)} x_j \right)$ , donc :

$${}^t X H_n X = \sum_{i=0}^{n-1} \left( x_i \sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j}^{(n)} x_j \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j}^{(n)} x_i x_j = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1}.$$

Or, avec  $\tilde{X} : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$ , polynomiale donc continue sur  $\mathbb{R}$ , on a, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\left( \tilde{X}(t) \right)^2 = \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \right) \left( \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} x_i x_j t^{i+j}.$$

Donc :

$$\int_0^1 \left( \tilde{X}(t) \right)^2 dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j} dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} = {}^t X H_n X.$$

Ainsi,  ${}^t X H_n X = \int_0^1 \left( \tilde{X}(t) \right)^2 dt \geq 0$  et comme  $\tilde{X}^2$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0,1]$  :

$${}^t X H_n X = \int_0^1 \left( \tilde{X}(t) \right)^2 dt = 0 \iff \forall t \in [0,1], \tilde{X}(t) = 0.$$

Ainsi, la fonction polynomiale  $\tilde{X}$  admet une infinité de racines : elle est donc nulle, ce qui revient à dire que tous ses coefficients sont nuls, donc que  $x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$ , soit  $X = 0$ .

Finalement, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^t X H_n X \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $X = 0$ , donc  $H_n$  est définie positive et ainsi :

$H_n$  est une matrice symétrique réelle, définie positive.

2) Remarquons déjà que si  $\lambda \in Sp(H_n)$  et  $X \neq 0$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a :

$${}^t X H_n X = {}^t X (\lambda X) = \lambda {}^t X X = \lambda \|X\|^2 > 0 \implies \lambda > 0 \text{ (car } \|X\|^2 > 0).$$

Donc toutes les valeurs propres de  $H_n$  sont strictement positives.

On note  $\mathcal{V} = \ker(H_n - \rho_n I_n)$  avec  $\rho_n = \max(Sp(H_n)) > 0$ .

Comme  $H_n$  est une matrice symétrique réelle, il existe une base orthonormée  $(U_1, \dots, U_n)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $H_n$ . On note  $\lambda_i$  la valeur propre de  $H_n$  associée à  $U_i$  et on suppose que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \rho_n.$$

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Il existe  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X = x_1 U_1 + \dots + x_n U_n$  et :

$$H_n X = H_n(x_1 U_1 + \dots + x_n U_n) = x_1 H_n U_1 + \dots + x_n H_n U_n = x_1 \lambda_1 U_1 + \dots + x_n \lambda_n U_n.$$

Donc :

$${}^t X H_n X = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2.$$

Remarquons qu'alors, comme  $\lambda_k \leq \rho_n$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$${}^t X H_n X = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \rho_n x_1^2 + \dots + \rho_n x_n^2 = \rho_n (x_1^2 + \dots + x_n^2) = \rho_n \|X\|^2.$$

- Si  $X \in \mathcal{V}$ , alors comme on l'a vu plus haut  ${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$ .
- Si  ${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$ , soit  $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = \rho_n x_1^2 + \dots + \rho_n x_n^2$ , alors :

$$(\rho_n - \lambda_1)x_1^2 + \dots + (\rho_n - \lambda_n)x_n^2 = 0 \Leftrightarrow (\rho_n - \lambda_1)x_1^2 = \dots = (\rho_n - \lambda_n)x_n^2 = 0.$$

car  $(\rho_n - \lambda_k)x_k^2 \geq 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ceci implique que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\lambda_k \neq \rho_n$ ,  $x_k^2 = 0$  et donc que  $X = x_{n-\alpha} U_{n-\alpha} + \dots + x_n U_n$  avec  $\mathcal{V} = \ker(H_n - \rho_n I_n) = \text{Vect}(U_{n-\alpha}, \dots, U_n)$  et ainsi,  $X \in \mathcal{V}$ .

Finalement, on a bien :

$$X \in \mathcal{V} \Leftrightarrow {}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$$

3) On a vu plus haut que :

$${}^t X_0 H_n X_0 = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \text{ et } {}^t |X_0| H_n |X_0| = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i| |x_j|}{i+j+1} = \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i x_j|}{i+j+1}.$$

Or, pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{x_i x_j}{i+j+1} \leq \frac{|x_i x_j|}{i+j+1}$ , donc :

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{x_i x_j}{i+j+1} \leq \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \frac{|x_i x_j|}{i+j+1}.$$

Soit :

$${}^t X_0 H_n X_0 \leq {}^t |X_0| H_n |X_0|$$

Or,  $X_0 \in \mathcal{V}$  donc, d'après la question précédente :

$${}^t X_0 H_n X_0 = \rho_n \|X_0\|^2.$$

On a vu aussi dans la question précédente que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  ${}^t X H_n X \leq \rho_n \|X\|^2$ , donc :

$${}^t |X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \|X_0\|^2.$$

Enfin,  $\|X_0\|^2 = |x_0|^2 + \dots + |x_{n-1}|^2 = x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \|X_0\|^2$ , donc :

$${}^t X_0 H_n X_0 \leq {}^t |X_0| H_n |X_0| \Rightarrow \rho_n \|X_0\|^2 \leq {}^t |X_0| H_n |X_0| \leq \rho_n \|X_0\|^2 = \rho_n \|X_0\|^2 \Rightarrow {}^t |X_0| H_n |X_0| = \rho_n \|X_0\|^2.$$

Mais alors, avec la réciproque de la question 2, on obtient :

$$|X_0| \in \mathcal{V}$$

4) On a :

$$H_n |X_0| = \left( \sum_{j=0}^{n-1} h_{0,j}^{(n)} |x_j| \quad \sum_{j=0}^{n-1} h_{1,j}^{(n)} |x_j| \quad \dots \quad \sum_{j=0}^{n-1} h_{n-1,j}^{(n)} |x_j| \right) = \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+1} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+2} \quad \dots \quad \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+n} \right).$$

Donc, si  $H_n |X_0|$  possède une coordonnée nulle, il existe  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|x_j|}{j+k} = 0$  et comme tous les

termes de la somme sont positifs, ceci implique que pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{|x_j|}{j+k} = 0$ , soit  $x_j = 0$ .

Ainsi, si  $H_n |X_0|$  possède une coordonnée nulle,  $X_0 = 0$ , ce qui est absurde car  $X_0$  est supposé non nul et donc :

$$H_n |X_0| \text{ n'a aucune coordonnée nulle.}$$

On a vu que  $|X_0| \in \mathcal{V}$ , donc  $H_n |X_0| = \rho_n |X_0| = {}^t (\rho_n |x_0| \quad \rho_n |x_1| \quad \dots \quad \rho_n |x_{n-1}|)$ . Alors, pour tout  $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\rho_n |x_j| \neq 0$  et donc  $x_j \neq 0$ . Ainsi :

$$X_0 \text{ n'a aucune coordonnée nulle.}$$

5) Soient  $X, Y \in \mathcal{V}$ , non nuls, avec  $X = {}^t (x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{n-1})$  et  $Y = {}^t (y_0 \quad y_1 \quad \dots \quad y_{n-1})$ .

D'après la question précédente, les coordonnées de  $X$  sont non nulles, et donc, entre autres, on a  $x_0 \neq 0$ .

Comme  $\mathcal{V}$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  :

$$Y - \frac{y_0}{x_0} X \in \mathcal{V}.$$

La première coordonnée de ce vecteur est  $y_0 - \frac{y_0}{x_0} x_0 = 0$ , donc  $Y - \frac{y_0}{x_0} X$  est un vecteur de  $\mathcal{V}$  possédant une coordonnée nulle. D'après la question précédente, il est nul, soit :

$$Y = \frac{y_0}{x_0} X.$$

Ainsi, deux vecteurs de  $\mathcal{V}$  sont toujours colinéaires, donc :  $\dim \mathcal{V} \leq 1$ .

Mais  $\mathcal{V}$  est un sous-espace propre de  $H_n$ , donc :  $\dim \mathcal{V} \geq 1$ .

Ainsi :

$$\dim \mathcal{V} = 1$$

## B - Inégalité de Hilbert

6) Posons  $P = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$  et  $Q = \frac{a_p}{p+1} X^{p+1} + \dots + \frac{a_1}{2} X^2 + a_0 X$ . On a  $Q' = P$ , donc :

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = Q(1) - Q(-1).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta &= \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^p a_k e^{ik\theta} \right) e^{i\theta} d\theta = \int_0^\pi \left( \sum_{k=0}^p a_k e^{i(k+1)\theta} \right) d\theta = \sum_{k=0}^p a_k \int_0^\pi e^{i(k+1)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^p a_k \left[ \frac{e^{i(k+1)\theta}}{i(k+1)} \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{i} \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} [(-1)^{k+1} - 1] = \frac{1}{i} \left[ \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} (-1)^{k+1} - \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{k+1} \right] = \frac{1}{i} [Q(-1) - Q(1)] = i [Q(1) - Q(-1)] \end{aligned}$$

Donc  $\int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta = i \int_{-1}^1 P(t) dt$  et :

$$\left| \int_{-1}^1 P(t) dt \right| = \left| \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta}) e^{i\theta}| d\theta.$$

Soit :

$$\boxed{\left| \int_{-1}^1 P(t) dt \right| \leq \int_0^\pi |P(e^{i\theta})| d\theta}$$

On a vu que pour tout  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^t X H_n X = \int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt$ , donc en appliquant l'inégalité ci-dessus au polynôme  $P = \tilde{X}^2$ , on obtient :

$$\left| \int_{-1}^1 (\tilde{X}(t))^2 dt \right| \leq \int_0^\pi |(\tilde{X}(e^{i\theta}))^2| d\theta.$$

Or, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $(\tilde{X}(t))^2 \geq 0$ , donc :

$${}^t X H_n X = \int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt \leq \int_{-1}^1 (\tilde{X}(t))^2 dt = \left| \int_{-1}^1 (\tilde{X}(t))^2 dt \right|.$$

Et ainsi :

$$\boxed{{}^t X H_n X \leq \int_0^\pi |(\tilde{X}(e^{i\theta}))^2| d\theta}$$

7) On a pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  :

$$\left| (\tilde{X}(e^{i\theta}))^2 \right| = |\tilde{X}(e^{i\theta})|^2 = \tilde{X}(e^{i\theta}) \overline{\tilde{X}(e^{i\theta})} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} x_k (e^{i\theta})^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell (e^{i\theta})^\ell \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell e^{i(k-\ell)\theta}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |(\tilde{X}(e^{i\theta}))^2| d\theta &= \int_0^\pi \left( \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell e^{i(k-\ell)\theta} \right) d\theta = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} x_k x_\ell \int_0^\pi e^{i(k-\ell)\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \pi + \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} x_k x_\ell \left[ \frac{e^{i(k-\ell)\pi} - 1}{i(k-\ell)} \right] \\ &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 + \frac{1}{i} \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} x_k x_\ell \left[ \frac{(-1)^{k-\ell} - 1}{k-\ell} + \frac{(-1)^{\ell-k} - 1}{\ell-k} \right] = \pi \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_0^\pi \left| \tilde{X}(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \pi \|X\|^2.$$

Et ainsi :

$$\boxed{{}^t X H_n X \leq \pi \|X\|^2}$$

8) Soit  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre de  $H_n$  associé à  $\rho_n$  (donc  ${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2$ ).

Posons  $Y = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1} \ 0) \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ . D'après la question 2, on a :

$${}^t Y H_{n+1} Y \leq \rho_{n+1} \|Y\|^2 \quad (1).$$

Or, d'une part,  $\|Y\|^2 = x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 + 0^2 = x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \|X\|^2$  et d'autre part  $\tilde{Y} = \tilde{X}$ , donc :

$${}^t Y H_{n+1} Y = \int_0^1 (\tilde{Y}(t))^2 dt = \int_0^1 (\tilde{X}(t))^2 dt = {}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2.$$

Alors, (1) devient  $\rho_n \|X\|^2 \leq \rho_{n+1} \|X\|^2$  et comme  $X$  est non nul, on a  $\|X\|^2 > 0$  et :

$$\underline{\rho_n \leq \rho_{n+1}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (\rho_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}}$$

Toujours avec le vecteur propre  $X$  (avec  $\|X\|^2 > 0$ ) on a, d'après la question précédente :

$${}^t X H_n X = \rho_n \|X\|^2 \leq \pi \|X\|^2 \Rightarrow \rho_n \leq \pi.$$

Ainsi, la suite  $(\rho_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\pi$  et comme elle est croissante :

$$\boxed{\text{La suite } (\rho_n)_{n \geq 1} \text{ est convergente.}}$$

## C - Un opérateur intégral

9) On a  $E = \left\{ f \in C([0,1[, \mathbb{R}), \int_0^1 |f| < \infty \right\}$ . Soit  $f \in E$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in [0,1[$ , on a :

$$K_n(xt) f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (xt)^k f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k t^k f(t).$$

Et, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et tout  $t \in [0,1[$ , on a  $|t^k f(t)| \leq |f(t)|$ . Comme  $f$  est intégrable sur  $[0,1[$ ,  $t \mapsto t^k f(t)$

l'est aussi par théorème de comparaison, et donc  $\int_0^1 K_n(xt) f(t) dt$  est bien défini et vaut  $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k f(t) dt$ .

Ainsi,  $T_n(f)$  est bien définie et est polynomiale, donc continue et intégrable sur  $[0,1[$ . Ainsi,  $T_n$  est bien à images dans  $E$ . De plus,  $T_n$  est linéaire par linéarité de l'intégrale, donc :

$$\boxed{T_n \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

Pour  $f \in E$ , posons  $a_k = \int_0^1 t^k f(t) dt$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . On a alors :

$$T_n(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [0, 1[, \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k = 0$$

car le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

Ainsi, 0 est valeur propre de  $T_n$  si et seulement s'il existe  $f \in E \setminus \{0\}$  telle que  $\int_0^1 t^k f(t) dt = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Or, si l'on munit  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^1 PQ$ , l'orthogonal de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  (qui est un hyperplan de  $\mathbb{R}_n[X]$ ) est une droite, donc contient des polynômes non nuls.

Soit alors  $Q$  un tel polynôme. On a  $Q \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ , donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\langle X^k, Q \rangle = 0$ , soit :

$$\int_0^1 t^k Q(t) dt = 0.$$

Or, la fonction polynôme  $Q$  appartient à  $E$  (et n'est pas nulle), donc il existe bien  $Q \in E \setminus \{0\}$  telle que  $\int_0^1 t^k Q(t) dt = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , et ainsi :

0 est valeur propre de  $T_n$ .

Remarquons qu'en s'inspirant des polynômes de Legendre, on peut prendre  $Q = \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - X)^n]$ .

**10)** Remarquons que pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $\tilde{X} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ , donc la restriction de  $\tilde{X}$  à  $[0, 1[$  appartient à  $E$ .

On a pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\int_0^1 t^k \tilde{X}(t) dt = \int_0^1 t^k \left( \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) dt = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \int_0^1 t^{k+j} dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_j}{k+j+1} = y_k$$

où  ${}^t(y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{n-1}) = H_n X$ .

Alors, pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$T_n(\tilde{X})(x) = \int_0^1 K_n(xt) \tilde{X}(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \int_0^1 t^k \tilde{X}(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k.$$

Soit :

$$T_n(\tilde{X}) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} y_k x^k \text{ avec } {}^t(y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{n-1}) = H_n X.$$

Soit  $\lambda > 0$  une valeur propre de  $H_n$  est  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  un vecteur propre associé.

On a alors  ${}^t(y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{n-1}) = H_n X = \lambda X = {}^t(\lambda x_0 \ \lambda x_1 \ \dots \ \lambda x_{n-1})$ , donc :

$$T_n(\tilde{X}) : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} y_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k t^k = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k = \lambda \tilde{X}(t).$$

Donc,  $T_n(\tilde{X}) = \lambda \tilde{X}$  et comme  $X \neq 0$  (c'est un vecteur propre), on a  $\tilde{X} \neq 0$ . Ainsi,  $\lambda$  est valeur propre non nulle de  $T_n$ .

Réciproquement, si  $\lambda$  est valeur propre non nulle de  $T_n$ , alors il existe  $f \in E$  non nulle telle que  $T_n(f) = \lambda f$ , soit  $f = \frac{1}{\lambda} T_n(f)$ . Donc,  $f$  est polynomiale de degré au plus  $n-1$ .

Posons alors  $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$  avec  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a  $f = \tilde{X}$ , donc, pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$T_n(f)(x) = T_n(\tilde{X})(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (H_n X)_k x^k = \lambda f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k x^k.$$

Les deux fonctions polynomiales  $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (H_n X)_k x^k$  et  $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \lambda x_k x^k$  coïncident donc sur  $]0,1[$ , donc sont égales. Elles ont alors les mêmes coefficients, soit  $(H_n X)_k = \lambda x_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Ainsi,  $H_n X = \lambda X$  et  $\lambda$  est valeur propre (non nulle) de  $H_n$ .

Finalement :

$H_n$  et  $T_n$  ont les mêmes valeurs propres non nulles.

11) On a  $\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in ]0,1[, \varphi(x) > 0, \lim_{0^+} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R}, \lim_{1^-} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R} \right\}$ .

Remarquons que si  $\varphi \in \mathcal{A}$  :

- $\varphi \in E$ , alors  $\lim_{0^+} \varphi = \varphi(0) \in \mathbb{R}$ , donc si  $\lim_{0^+} \frac{1}{\varphi}$  est finie, alors c'est  $\frac{1}{\varphi(0)}$  et  $\varphi(0) \neq 0$  ;
- $\varphi > 0$  sur  $]0,1[$ , donc  $\varphi(0) > 0$  et  $\lim_{1^-} \frac{1}{\varphi} \in \mathbb{R}_+$ , donc  $\lim_{1^-} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ .

Réciproquement, pour  $\varphi \in E$ , si les conditions ci-dessus sont respectées alors  $\varphi \in \mathcal{A}$ . Ainsi :

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in E \mid \forall x \in ]0,1[, \varphi(x) > 0, \lim_{0^+} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \right\}.$$

On veut prouver que :

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt \right) \right] = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right) \right].$$

Ceci revient à prouver que pour tout  $\varphi \in \mathcal{A}$  :

$$\rho_n \leq \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt \right) = \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right).$$

D'après la question précédente,  $f \in E$  est un vecteur propre (non nul) de  $T_n$  associé à  $\rho_n$  si et seulement si  $f$  est de la forme  $t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$  où  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1})$  est un vecteur propre de  $H_n$  associé à  $\rho_n$ .

De plus, d'après la partie A, il existe un vecteur propre  $X = {}^t(x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-1})$  de  $H_n$  associé à  $\rho_n$  dont toutes les coordonnées sont strictement positives.

On peut donc considérer  $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k$  telle que  $T_n(f) = \rho_n f$  et  $x_k > 0$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

On a alors  $f(0) = x_0 > 0$ ,  $\lim_{1^-} f = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $f > 0$  sur  $]0,1[$ .

Ainsi,  $f \in \mathcal{A}$  et on a pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$\sup_{]0,1[} \left( \frac{T_n(f)}{f} \right) = \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{\rho_n f}{f} \right) = \rho_n.$$

Soit maintenant  $\varphi \in \mathcal{A}$  quelconque.

Remarquons déjà que  $T_n(\varphi)$  est polynômiale, donc continue sur  $[0, 1]$  et, par hypothèse,  $\frac{1}{\varphi}$  admet un

prolongement continu sur  $[0, 1]$ , donc  $\frac{T_n(\varphi)}{\varphi}$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$  et donc

$\sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right)$  existe et vaut  $\max_{x \in [0,1]} \left( \frac{T_n(\varphi)(x)}{\varphi(x)} \right)$  (où le prolongement  $\frac{T_n(\varphi)}{\varphi}$  est rappelé  $\frac{T_n(\varphi)}{\varphi}$ ).

Posons  $g = \frac{\varphi}{f}$ .

D'après ce qui précède,  $f$  est peut être prolongée en 1 en une fonction continue et strictement positive sur  $[0, 1]$  et  $\varphi$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1[$  avec  $\lim_{\Gamma} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ . Alors,  $g$  est continue et strictement positive sur  $[0, 1[$  (comme quotient de telles fonctions) et  $\lim_{\Gamma} g \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ . Ceci permet d'affirmer que  $g$  possède un minimum  $g(a) > 0$  sur  $[0, 1[$  (avec  $a \in [0, 1[$ ).

Alors, pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $t \in [0, 1[$ , on a  $K_n(xt)f(t) \geq 0$  et :

$$K_n(xt)\varphi(t) = K_n(xt)f(t)g(t) \geq K_n(xt)f(t)g(a).$$

Donc, pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \geq \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)f(t)g(a) dt.$$

Or :

$$\frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)f(t)g(a) dt = g(a) \frac{f(x)}{\varphi(x)} \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(xt)f(t) dt = \frac{g(a)}{g(x)} \frac{T_n(f)(x)}{f(x)} = \frac{g(a)}{g(x)} \rho_n.$$

Donc, pour tout  $x \in [0, 1[$  :

$$\frac{g(a)}{g(x)} \rho_n \leq \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \leq \max_{x \in [0,1]} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \right) = \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \right)$$

En particulier pour  $x = a \in [0, 1[$ , on obtient :

$$\rho_n \leq \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \right).$$

Ainsi, on a bien :

$$\rho_n \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt)\varphi(t) dt \right) \right]$$

De plus, on a vu plus haut que  $f \in \mathcal{A}$  et  $\sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{f(x)} \int_0^1 K_n(xt)f(t) dt \right) = \rho_n$ , donc le sup ci-dessus est atteint en  $\varphi = f$  : c'est un minimum.



Ainsi :

$$\rho_n = \min_{\varphi \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt \right) \right] = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt \right) \right]$$

12) Soient  $\varphi \in \mathcal{A}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $x \in ]0,1[$ ,  $J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 g(x,t) dt$  avec  $g : (x,t) \mapsto \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx}$ , définie sur  $]0,1[ \times ]0,1[$ .

- Pour tout  $x \in ]0,1[$ ,  $t \mapsto g(x,t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $[0,1[$ , car pour tout  $t \in [0,1[$ ,  $|g(x,t)| = g(x,t) \leq \frac{1}{1-x} \varphi(t)$  et par hypothèse,  $\varphi$  est intégrable sur  $[0,1[$ .
- Pour tout  $t \in [0,1[$ ,  $x \mapsto f(x,t)$  est de classe  $C^1$  sur  $]0,1[$ .
- Pour tout  $x \in ]0,1[$ ,  $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2}$  est continue par morceaux sur  $[0,1[$ .
- Pour tout  $a \in ]0,1[$  et tout  $(x,t) \in ]0,a[ \times ]0,1[$ , on a  $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \leq \frac{1}{(1-a)^2} \varphi(t)$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{(1-a)^2} \varphi(t)$  est positive, continue par morceaux et intégrable sur  $[0,1[$ .

Alors,  $J_n$  est de classe  $C^1$  sur  $]0,a[$  pour tout  $a \in ]0,1[$ , donc sur  $]0,1[$  et pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$J_n'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt.$$

On a alors pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$x J_n'(x) = \int_0^1 \frac{xt^{n+1} \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt = \int_0^1 \frac{(xt-1+1)t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt = \int_0^1 \left( \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} - \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} \right) dt.$$

Et comme  $J_n(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} dt$  converge, on obtient pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$x J_n'(x) = \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt - J_n(x)$$

13) Soient  $x \in ]0,1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

Remarquons que pour tout  $t \in [0,1[$ ,  $tx < 1$  donc  $1-tx \neq 0$ .

Commençons par le cas où  $n = 0$ . On a alors  $n J_n(x) = n J_{n-1}(x) = 0$  et on veut montrer que :

$$0 = \varphi(0) + (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

Les fonctions  $t \mapsto \frac{1-t}{1-tx}$  et  $\varphi$  sont  $C^1$  sur  $[0,1[$  (la première est rationnelle, de dérivée  $t \mapsto \frac{x-1}{(1-tx)^2}$ ).

On peut donc réaliser une intégration par parties sur  $[0,a[$  pour tout  $a \in ]0,1[$ , ce qui donne :

$$\int_0^a \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt = \left[ \frac{(1-t)\varphi(t)}{1-tx} \right]_0^a - \int_0^a \frac{(x-1)\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt = \frac{(1-a)\varphi(a)}{1-ax} - \varphi(0) - (x-1) \int_0^a \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt.$$

Or,  $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)\varphi(t) = 0$  et, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\left| \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} \right| = \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} \leq \frac{\varphi(t)}{(1-x)^2}$  avec  $\frac{\varphi}{(1-x)^2}$  intégrable sur  $[0, 1[$

(car  $\varphi$  l'est), donc  $\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt$  converge et ainsi, on peut faire tendre  $a$  vers  $1^-$  dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt = -\varphi(0) - (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt.$$

Soit :

$$0 = \varphi(0) + (x-1) \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

Ceci établit la relation voulue pour  $n = 0$ , avec, dans ce cas,  $c = \varphi(0)$ .

Soit maintenant  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La fonction  $t \mapsto \frac{t^n(1-t)}{1-tx}$  est rationnelle, donc de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ , de dérivée :

$$t \mapsto \frac{(nt^{n-1} - nt^n)(1-tx) + (x-1)t^n}{(1-tx)^2}.$$

Comme  $\varphi$  est aussi de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ , on peut donc réaliser une intégration par parties sur  $[0, a]$  pour tout  $a \in ]0, 1[$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt &= \left[ \frac{t^n(1-t)\varphi(t)}{1-tx} \right]_0^a - \int_0^a \frac{(nt^{n-1} - nt^n)(1-tx) + (x-1)t^n}{(1-tx)^2} \varphi(t) dt \\ &= \frac{a^n}{1-ax} (1-a)\varphi(a) - n \int_0^a \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx} dt + n \int_0^a \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx} dt - (x-1) \int_0^a \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{a^n}{1-ax} (1-a)\varphi(a) \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} 0$$

$$\int_0^a \frac{t^{n-1}\varphi(t)}{1-tx} dt \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} J_{n-1}(x)$$

$$\int_0^a \frac{t^n\varphi(t)}{1-tx} dt \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} J_n(x)$$

$$\forall t \in [0, 1[, \left| \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} \right| \leq \frac{\varphi(t)}{(1-x)^2} \Rightarrow \int_0^a \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt \text{ converge (comme plus haut)}$$

Donc, on peut faire tendre  $a$  vers  $1^-$  dans la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt = -nJ_{n-1}(x) + nJ_n(x) - (x-1) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt.$$

Soit :

$$nJ_n(x) = nJ_{n-1}(x) + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n\varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^n(1-t)\varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

La relation est vérifiée pour  $n \in \mathbb{N}^*$  avec  $c = 0$ .

Finalement, on a bien pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) + (x-1) \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt \quad \text{avec} \begin{cases} c = \varphi(0) & \text{quand } n = 0 \\ c = 0 & \text{quand } n > 0 \end{cases}$$

14) Soient  $x \in ]0,1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 12 :

$$(x-1) \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{(1-tx)^2} dt = -x(1-x)J_n'(x) + (x-1)J_n(x).$$

Donc d'après la question 13 :

$$nJ_n(x) = c + nJ_{n-1}(x) - x(1-x)J_n'(x) + (x-1)J_n(x) + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt.$$

Soit :

$$\begin{aligned} x(1-x)J_n'(x) &= c + nJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) + (x-1)J_n(x) + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt \\ &= c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n[J_{n-1}(x) - xJ_n(x)] + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt \end{aligned}$$

Si  $n = 0$ , ceci donne  $x(1-x)J_0'(x) = c + (x-1)J_0(x) + \int_0^1 \frac{(1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt$  qui est le résultat voulu (en posant, pour

$n = 0$ ,  $n \int_0^1 t^{n-1} \varphi'(t) dt = 0$ . Si  $n \geq 1$ , on a :

$$J_{n-1}(x) - xJ_n(x) = \int_0^1 \frac{t^{n-1} \varphi(t)}{1-tx} dt - x \int_0^1 \frac{t^n \varphi(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 \frac{(t^{n-1} - xt^n) \varphi(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt.$$

Donc, dans tous les cas :

$$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt$$

15) L'équation (E) :  $(1-t)y' = -\gamma y$ , se réécrit pour  $t \in [0,1[$  :  $y' = -\frac{\gamma}{1-t} y$ .

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. Pour tout  $t \in [0,1[$ ,  $1-t > 0$ , donc :

Les solutions de (E) sur  $[0,1[$  sont les fonctions  $t \mapsto Ke^{\gamma \ln(1-t)} = K(1-t)^\gamma$  avec  $K \in \mathbb{R}$ .

Les hypothèses faites sur  $\varphi$  sont nombreuses :

- $\varphi \in C^1([0,1[, \mathbb{R})$  ;
- $\int_0^1 |\varphi| < \infty$  ;
- $\forall x \in [0,1[, \varphi(x) > 0$  ;
- $\lim_{\Gamma} \varphi \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$  ;
- $\lim_{t \rightarrow \Gamma} (1-t)\varphi(t) = 0$ .

Soit  $g : t \mapsto K(1-t)^\gamma$  avec  $K \in \mathbb{R}$  une solution de (E).

On a  $g \in C^1([0,1[, \mathbb{R})$  quels que soient  $K$  et  $g$ , et  $\varphi > 0$  sur  $]0,1[$  si et seulement si  $K > 0$ . On suppose que c'est le cas. Alors :

- $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = K \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^\gamma \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\} \Leftrightarrow \gamma \leq 0$  ;
- $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)g(t) = K \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^{\gamma+1} = 0 \Leftrightarrow \gamma > -1$  ;
- Pour  $-1 < \gamma \leq 0$  et tout  $a \in [0,1[$  :

$$\int_0^a |g(t)| dt = K \int_0^a (1-t)^\gamma dt = K \left[ -\frac{(1-t)^{\gamma+1}}{\gamma+1} \right]_0^a = \frac{K}{\gamma+1} (1-(1-a)^{\gamma+1}) \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} \frac{K}{\gamma+1} \Rightarrow \int_0^1 |g| < \infty.$$

Finalelement :

Une solution  $t \mapsto K(1-t)^\gamma$  de (E) vérifie les hypothèses faites sur  $\varphi$  si et seulement si  $\begin{cases} K > 0 \\ -1 < \gamma \leq 0 \end{cases}$ .

On suppose dans la suite que  $\varphi : t \mapsto K(1-t)^\gamma$  avec  $\varphi(0) = K = 1 > 0$ , donc :

$$\varphi : t \mapsto (1-t)^\gamma$$

avec  $-1 < \gamma \leq 0$ . Alors :

$$\int_0^1 \frac{t^n (1-t) \varphi'(t)}{1-tx} dt = \int_0^1 \frac{t^n [-\gamma \varphi(t)]}{1-tx} dt = -\gamma J_n(x)$$

$$\int_0^1 t^{n-1} \varphi(t) dt = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^\gamma dt$$

La relation de la question 14 se réécrit :

$$x(1-x)J_n'(x) = c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^\gamma dt - \gamma J_n(x).$$

**16)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in ]0,1[$ ,  $\Phi_n(x) = \frac{x^n J_n(x)}{\varphi(x)} = \frac{x^n J_n(x)}{(1-x)^\gamma}$ .

Par hypothèse,  $\varphi$  est de classe  $C^1$  et ne s'annule pas sur  $]0,1[$ . La fonction  $x \mapsto x^n$  est dérivable sur  $]0,1[$  et  $J_n$  l'est aussi d'après la question 12. Ainsi,  $x \mapsto x^n J_n(x)$  est dérivable sur  $]0,1[$  en tant que produit de telles fonctions et en tant que quotient de telles fonctions :

$\Phi_n$  est dérivable sur  $]0,1[$ .

De plus, pour tout  $x \in ]0,1[$  (en prenant  $nx^{n-1}J_n(x) = 0$  quand  $n = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \Phi_n'(x) &= \frac{x^{n-1} [nJ_n(x) + xJ_n'(x)](1-x)^\gamma + x^n J_n(x) \gamma (1-x)^{\gamma-1}}{(1-x)^{2\gamma}} \\ &= \frac{x^{n-1} [n(1-x)J_n(x) + x(1-x)J_n'(x)] + \gamma x^n J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}} \end{aligned}$$

Et avec la relation établie à la fin de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\Phi_n'(x) &= \frac{x^{n-1} \left[ n(1-x)J_n(x) + c + (n+1)(x-1)J_n(x) + n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt - \gamma J_n(x) \right] + \gamma x^n J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}} \\ &= \frac{x^{n-1}(\gamma+1)(x-1)J_n(x)}{(1-x)^{\gamma+1}} + \left( c + n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt \right) \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \\ &= -\frac{\gamma+1}{x} \frac{x^n J_n(x)}{(1-x)^\gamma} + \left( c + n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt \right) \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}}\end{aligned}$$

Et ainsi, on obtient pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$\Phi_n'(x) = -(\gamma+1) \frac{\Phi_n(x)}{x} + c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} \quad \text{avec } c_n = c + n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\gamma dt.$$

17) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in ]0,1[$ , on a :

$$x^{\gamma+1} \Phi_n'(x) + (\gamma+1)x^\gamma \Phi_n(x) = c_n \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{\gamma+1}} x^{\gamma+1} = c_n \frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}.$$

Or,  $x \mapsto x^{\gamma+1} \Phi_n'(x) + (\gamma+1)x^\gamma \Phi_n(x)$  est la dérivée de  $x \mapsto x^{\gamma+1} \Phi_n(x)$  qui s'annule en 0.

De plus,  $n + \gamma > -1$ , donc  $x \mapsto \frac{x^{n+\gamma}}{(1-x)^{\gamma+1}}$  est intégrable en 0 et ainsi :

$$x^{\gamma+1} \Phi_n(x) = c_n \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{\gamma+1}} dt$$

Soit, pour tout  $x \in ]0,1[$  :

$$\Phi_n(x) = \frac{c_n}{x^{\gamma+1}} \int_0^x \frac{t^{n+\gamma}}{(1-t)^{\gamma+1}} dt$$

18) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $a \in ]0,1[$ , on a  $\varphi_\alpha : t \mapsto (1-t)^{-\alpha}$  vérifie toutes les conditions précédentes sur  $\varphi$ .

En particulier  $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}$ , donc :

$$\rho_n = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi(t) dt \right) \right] \leq \inf_{\alpha \in ]0,1[} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi_\alpha(t) dt \right) \right].$$

Or, pour tout  $x \in ]0,1[$  et tout  $t \in [0,1[$ , on a  $1-tx \neq 0$ , donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 K_n(xt) \varphi_\alpha(t) dt &= \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} (xt)^k \right) \varphi_\alpha(t) dt = \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 \frac{1-(xt)^n}{1-xt} \varphi_\alpha(t) dt \\ &= \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 \frac{\varphi_\alpha(t)}{1-xt} dt - \frac{x^n}{\varphi_\alpha(x)} \int_0^1 \frac{t^n \varphi_\alpha(t)}{1-xt} dt = \frac{J_0(x)}{\varphi_\alpha(x)} - \frac{x^n J_n(x)}{\varphi_\alpha(x)} = \Phi_0(x) - \Phi_n(x) \\ &= \frac{c_0}{x^{-\alpha+1}} \int_0^x \frac{t^{-\alpha}}{(1-t)^{-\alpha+1}} dt - \frac{c_n}{x^{-\alpha+1}} \int_0^x \frac{t^{n-\alpha}}{(1-t)^{-\alpha+1}} dt = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt\end{aligned}$$

avec  $c_0 = \varphi_\alpha(0) = 1$  et  $c_n = n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{-\alpha} dt$ . Remarquons qu'il a déjà été vu que toutes les intégrales dans la suite d'égalités ci-dessus convergent.

Ainsi :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in ]0,1[} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-c_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt \right) \right].$$

Reste à montrer que :

$$c_n = n \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{-\alpha} dt = \theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

Or, on a  $\int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{-\alpha} dt = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{(1-\alpha)-1} dt$  avec  $n > 0$  et  $1-\alpha > 0$ , donc d'après les résultats admis dans l'énoncé :

$$\int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{-\alpha} dt = \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{(1-\alpha)-1} dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = \frac{(n-1)!\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

De plus, avec la relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

- Pour  $n=1$ , on a  $\Gamma(2-\alpha) = \Gamma(1-\alpha+1) = (1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ , donc la relation est vraie au rang  $n=1$ .
- Si pour  $n \in \mathbb{N}^*$  donné, on a  $\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha)$ , alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2-\alpha) &= \Gamma(n+1-\alpha+1) = (n+1-\alpha)\Gamma(n+1-\alpha) \\ &= (n+1-\alpha)[(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)\Gamma(1-\alpha)] \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= (1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)(n+1-\alpha)\Gamma(1-\alpha) \end{aligned}$$

Donc, la relation est vraie au rang  $n+1$ .

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit :

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(n+1-\alpha)} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

Finalement, on a bien :

$$\rho_n \leq \inf_{\alpha \in ]0,1[} \left[ \sup_{x \in ]0,1[} \left( \frac{1}{x^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{1-\theta_n t^n}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} dt \right) \right] \text{ avec } \theta_n = \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)}.$$

19) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme  $\rho_n \leq \inf_{\alpha \in ]0,1[} \left[ \theta_n^{\frac{1-\alpha}{n}} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}} \right]$ , on  $\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1-\alpha}{n}} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{t^\alpha (1-t)^{1-\alpha}}$  pour tout  $\alpha \in ]0,1[$ ,

en particulier pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , soit :

$$\rho_n \leq \theta_n^{\frac{1}{2n}} \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Or :

$$\int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\theta_n^{-1/n}} \frac{2dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \left[ \arcsin(2t-1) \right]_0^{\theta_n^{-1/n}} = \arcsin(2\theta_n^{-1/n} - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\rho_n \leq \theta_n^{1/2n} \left[ \arcsin \left( 2 \frac{1}{(\theta_n^{1/2n})^2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Par ailleurs, avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ , on a :

$$\theta_n = \frac{n!}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right)\dots\left(n - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)} = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n) \times 2^n n!}{(2n)!} = \frac{2^n n! \times 2^n n!}{(2n)!} = 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Donc :

$$\theta_n^{1/2n} = 2 \left( \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^{1/2n} = \omega_n.$$

Ainsi :

$$\rho_n \leq \omega_n \left[ \arcsin \left( 2 \frac{1}{\omega_n^2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Remarquons que :

$$\theta_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{2}{2 - \frac{1}{2}} \times \dots \times \frac{n}{n - \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \omega_n = \theta_n^{1/2n} \geq 2^{1/2n} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\omega_n} \in ]0, 1[.$$

Posons  $h(x) = \arcsin(2x^2 - 1) + \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x$  sur  $]0, 1[$ . La fonction  $h$  est dérivable sur  $]0, 1[$  en tant que somme de telles fonctions (car quand  $x \in ]0, 1[$ , on a  $2x^2 - 1 \in ]-1, 1[$  et  $\arcsin$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ ) et pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{(1 - (2x^2 - 1))(1 + (2x^2 - 1))}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{(2 - 2x^2)2x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{4x}{2x\sqrt{1 - x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $h$  est constante et  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ , donc  $h$  est nulle et ainsi, pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\arcsin(2x^2 - 1) + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin x.$$

Et donc,  $\arcsin\left(2 \frac{1}{\omega_n^2} - 1\right) + \frac{\pi}{2} = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$ , d'où :

$$\boxed{\rho_n \leq 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)}$$

20) Avec la formule de Stirling, on a :

$$2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim 2^{2n} \frac{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi(2n)} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\pi n}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\omega_n &= 2 \left( \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^{1/2n} = \left( 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right)^{1/2n} = \exp \left[ \frac{1}{2n} \ln \left( 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2n} \ln (\sqrt{\pi n} + o(\sqrt{n})) \right] = \exp \left[ \frac{1}{2n} (\ln(\sqrt{\pi n}) + \ln(1 + o(1))) \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\ln(\pi n)}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1 + \frac{\ln(\pi n)}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln n}{4n} + \frac{\ln \pi}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln n}{4n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\boxed{\omega_n - 1 \sim \frac{\ln n}{4n}}$$

Posons  $\varepsilon_n = \omega_n - 1$ . On a alors :

$$\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = \pi - 2(1 + \varepsilon_n) \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = u_n - 2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$$

avec  $u_n = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$ .

On a  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc  $\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Alors,  $u_n \sim \sin u_n$ . Or :

$$\begin{aligned}\sin u_n &= \sin \left[ \pi - 2 \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \right] = \sin \left[ 2 \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \right] = 2 \sin \left[ \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \right] \cos \left[ \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \right] \\ &= 2 \frac{1}{\omega_n} \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_n^2}} = 2 \frac{\sqrt{\omega_n^2 - 1}}{\omega_n^2} = 2 \frac{\sqrt{\omega_n + 1}}{\omega_n^2} \sqrt{\omega_n - 1} = 2 \frac{\sqrt{\omega_n + 1}}{\omega_n^2} \sqrt{\varepsilon_n}\end{aligned}$$

Comme  $\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , on a :

$$u_n \sim \sin u_n \sim 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_n}.$$

Enfin, comme  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , on  $\varepsilon_n = o(\sqrt{\varepsilon_n})$  et  $2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim \pi\varepsilon_n$ , donc :

$$2\varepsilon_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = o(\sqrt{\varepsilon_n}) = o(u_n).$$

Finalement,  $\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = u_n + o(u_n)$ , donc  $\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim u_n \sim 2\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_n}$ , soit :

$$\boxed{\pi - 2\omega_n \arcsin\left(\frac{1}{\omega_n}\right) \sim \sqrt{\frac{2 \ln n}{n}}}$$



