TD du chapitre 20 : Applications géométriques du gradient

Dans tout ce qui suit, le plan (resp. l'espace) est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (*resp.* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$).

Exercice 1

Déterminer un paramétrage de la courbe plane C d'équation $(x^2+y^2)^3=(x^2-y^2)^2$ et en déterminer les points singuliers (s'il y en a).

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>0$, $b>0$ et $a>b$.

Trouver les normales à $\mathcal{E}$ les plus éloignées de O, l'origine du repère (et centre de symétrie de $\mathcal{E}$).

Exercice 3

Soit $f:(x,y,z)\mapsto x^2+y^2$.

1) Tracer l'intersection de $\Sigma=f^{-1}(\{1\})$ et du plan P d'équation $z=0$. Dessiner l'allure de Σ.
2) Soit M_0 un point de Σ de coordonnées (x_0,y_0,z_0). Donner une équation du plan tangent à Σ en M_0.
3) Soit $g\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ telle que la restriction de g à Σ admet un extremum local en M_0.

   Soient $G_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\big(\cos(t+\varphi),\sin(t+\varphi),z_0\big)$ et $G_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $t\mapsto g\big(x_0,y_0,z_0+t\big)$ avec $\varphi\in\mathbb{R}$ et $(x_0,y_0)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$.

   a. Montrer que G_1 et G_2 sont dérivables en 0, et calculer leurs dérivées.

   b. Montrer que $\nabla g(M_0)$ est colinéaire à $\nabla f(M_0)$.

Exercice 4

On définit Σ par l'équation $xyz=1$.

1) Montrer que Σ est une surface régulière.
2) Etudier l'intersection de Σ avec les plans d'équations respectives $x=x_0$, $y=y_0$ et $z=z_0$. En déduire l'allure de Σ.
3) Montrer que pour tout plan tangent à Σ, le tétraèdre formé par ce plan et les trois plans engendrés par les vecteurs de base a un volume constant (indépendant du plan tangent).

   ☺ *Le volume d'un tétraèdre* $ABCD$ *est donné par* $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$.

Exercice 5

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$.

1) Quelle est l'intersection de S sur le plan (xOy) ?
2) Quels sont les points singuliers de S ?
3) Quelles sont les droites tracées sur S ?
4) Montrer que la partie de S limitée au cube $[-1,1]^3$ admet le paramétrage suivant :

$$(u,v)\mapsto\left(\cos u,\cos v,\cos(u+v)\right).$$

Exercice 6

Fenêtre de Viviani : Soit un réel $a>0$ et C la courbe paramétrée par :

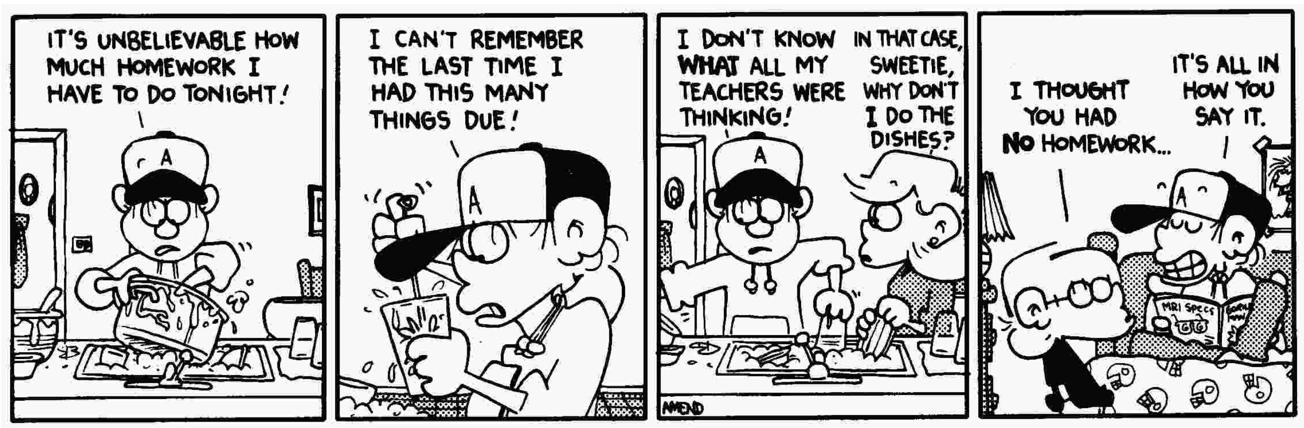
$$\begin{cases} x=a\sin(2t)\\ y=a\left(1-\cos(2t)\right)\\ z=2a\cos t\end{cases}$$

Montrer que C est tracée sur une sphère, un cylindre parabolique et un cylindre de révolution, que l'on précisera.

Exercice 7

Soient les surfaces : $S_1\ :\ y^2(x^2+z^2)-x^2-3z^2=0$ et $S_2\ :\ -x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$.

Montrer, qu'en chacun de leurs points communs, les plans tangents à S_1 et S_2 sont perpendiculaires.



Exercice 8 (*Centrale*)

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{1+x^2} & \text{si } y\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On appelle *S* la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z=f(x,y)$.

1) La fonction *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? de classe C^1 ? Déterminer ses lignes de niveau.
2) Soit $a\in\mathbb{R}$. On considère la droite D_a, de pente *a* et passant par le point $A(1,1)$ et *C* la courbe tracée sur *S* dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z=0$ est D_a.

   Soit *M* un point de *C*. Déterminer la tangente à *C* en *M*.

Exercice 9 (*Centrale*)

1) Soient f et g deux fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $m=\max(f,g)$. On note :

$$\mathcal{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=g(x,y)\}$$
$$\mathcal{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)>g(x,y)\}$$
$$\mathcal{G}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)<g(x,y)\}$$

On suppose qu'il existe un point $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$ en lequel m réalise un minimum local.

1) Que dire si $\vec{a}\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$?
2) On suppose que $\vec{a}\in\mathcal{E}$. Montrer que la famille $((\nabla f)(\vec{a}),(\nabla g)(\vec{a}))$ est liée.