

Centrale PSI 1 - 2010 un corrigé.

1 Etude d'un "C" matriciel.

A. Les trois premières colonnes de C f_1, f_2, f_3 sont clairement indépendantes (si $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3$, on a $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ en regardant les trois premières coordonnées) et les suivantes en sont des combinaisons linéaires. On a donc

$$\text{rang}(c) = 3 \quad \text{et} \quad \text{Im}(c) = \text{Vect}(e_3 + e_4 + e_5, e_2 + e_6, e_1 + e_7)$$

Par théorème du rang, le noyau de c est de dimension 4. Il suffit de trouver quatre vecteurs indépendants du noyau pour obtenir une base. On a

$$\ker(c) = \text{Vect}(e_5 - e_2, e_4 - e_3, e_6, e_7)$$

B.1. Comme il a été vu ci-dessus, on a

$$F = \text{Im}(c)$$

et F est donc stable par c ($\forall x \in F, u(x) \in F$).

B.2. On a aussi vu que (f_1, f_2, f_3) est une base de F . On remarque que

$$c(f_1) = 2f_3 + f_2, \quad c(f_2) = f_2, \quad c(f_3) = f_1$$

On en déduit que

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C.1. On a $\phi(f_2) = f_2$ et donc 1 est valeur propre de ϕ (f_2 est vecteur propre associé).

C.2. Comme matrice complexe, Φ admet trois valeurs propres 1, λ, μ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Φ est semblable à une matrice complexe triangulaire et, la trace étant un invariant de similitude, on a

$$1 + \lambda + \mu = 1$$

et donc $\lambda = -\mu$. 0 n'est pas valeur propre de Φ car Φ est de rang 3 (colonnes indépendantes de manière quasi immédiate) et ainsi λ et μ sont non nulles. On pourrait cependant avoir $\lambda = -\mu = 1$ et donc une valeur propre double qui nous impose de faire un calcul supplémentaire pour voir si Φ est diagonalisable.

C.3. Un calcul élémentaire donne

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de Φ^2 sont 1, λ^2, μ^2 et on a donc $1 + \lambda^2 + \mu^2 = 5$. Comme $\lambda = -\mu$, on a $\lambda^2 = 2$ et de même $\mu^2 = \sqrt{2}$ puis $\{\lambda, \mu\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. On a donc

$$\text{Sp}(\Phi) = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

On a trois valeurs propres réelles distinctes en dimension 3 et donc une matrice diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1 (dans \mathbb{R} cette fois).

D.1. Toute valeur propre de ϕ est a fortiori valeur propre de c . On a donc trois valeurs propres non nulles de multiplicité au moins 1. On a aussi 0 qui est valeur propre de multiplicité au moins 4 (le noyau est de dimension 4). Par dimension, on a toutes les valeurs propres et leur ordre de multiplicité :

0 de multiplicité 4; $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ de multiplicités 1

D.2. Les sous-espaces propres dont de dimension 4 (pour le noyau qu'on a calculé) et 1 (pour les trois autres car la multiplicité est égale à 1 et la dimension du sous-espace propres est plus petite que la multiplicité et toujours au moins égale à 1). La somme des dimension des sous-espaces propres vaut 7 et C est diagonalisable et semblable à $\text{diag}(0, 0, 0, 0, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ceci est vrai dans \mathbb{R} et donc a fortiori dans \mathbb{C} .

E.1. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(f_1 + \lambda f_2) \circ c = f_1 \circ c + \lambda f_2 \circ c = f_1 + \lambda f_2$$

et donc $f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{S}$. Comme \mathcal{S} est non vide (il contient l'application nulle), \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^7, \mathbb{R})$

E.2. On peouve par récurrence que la proposition

$$\forall f \in \mathcal{S}, f \circ c^n = f$$

est vrai pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ car $c^0 = Id$ et pour $n = 1$ par définition de \mathcal{S} .
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai au rang n . Soit $f \in \mathcal{S}$; on a

$$f \circ c^{n+1} = (f \circ c^n) \circ c = f \circ c = f$$

et le résultat est vrai au rang $n + 1$.

E.3. Le cours nous apprend (en notant $Jac(g)(y)$ la matrice jacobienne d'une fonction g en y) que

$$Jac(f \circ c)(X) = Jac(f)(c(X))Jac(c)(X)$$

Par ailleurs, comme c est linéaire on a

$$Jac(c)(X) = C$$

De $f \circ c = f$, on en déduit que

$$Jac(f)(X) = Jac(f)(c(X))C$$

En multipliant à droite par un élément du noyau de C , on obtiendra une relation ne faisant intervenir que les $\partial_i f(X)$. $\ker(C)$ étant de dimension 4, on obtient quatre relations qui sont

$$\partial_5(f)(X) - \partial_2(f)(X) = 0, \partial_4(f)(X) - \partial_3(f)(X) = 0, \partial_6(f)(X) = 0, \partial_7(f)(X) = 0$$

On peut bien sûr obtenir d'autre rélations mais elles lient $\partial_i(f)(X)$ et $\partial_i(f)(c(X))$ ce qui ne semble pas répondre à la question.

E.4. On obtient de même, c^2 étant linéaire,

$$Jac(f)(X) = Jac(f \circ c^2)(X) = Jac(f)(c^2(X))C^2$$

mais je ne vois pas ce que cela apporte de plus de manière simple.

E.5. Si f est linéaire alors $\forall X, Jac(f)(X) = f$ et on a donc $f = f \circ c$ ou encore $f \circ (Id - c) = 0$. f est représentée par une matrice ligne L qui vérifie $L(I_n - C) = 0$. L est donc dans le noyau de ${}^t(I_n - c)$. On obtient (mais avec un calcul supplémentaire) qu'il existe α tel que $L = \alpha(1, -1, 1, 1, -1, 0, 0)$. Les formes linéaire solutions sont celles du type

$$X \mapsto \alpha(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5)$$

2 Equation différentielle pour la lettre “C”.

A. Soit f solution de (E) sur l'intervalle J et soit a un réel non nul. Posons $h(x) = af(x/a)$; par théorèmes généraux, h est (comme f) dérivable sur J . De plus, $f(x) = \frac{1}{a}h(ax)$ et donc

$$\forall x \in J, f'(x) = h'(ax)$$

En injectant dans E , on a donc

$$\forall x \in J, h(ax)h'(ax) = -4(ax)$$

et h est solution de (E) sur aJ (si $J = [u, v]$ alors $aJ = [au, av]$ par exemple).

B.1. γ est une partie d'ellipse d'équation cartésienne $4x^2 + y^2 = 4$. \cos réalise une bijection de $[\pi/4, \pi]$ dans $[-1, \sqrt{2}/2]$ et il existe bien une fonction g (pour les paramètres considérés, on n'a pas deux points ayant même abscisse). De plus ($\sin(t) \geq 0$ et on a des ordonnées positives)

$$g : x \in [-1, \sqrt{2}/2] = \Delta \mapsto 2\sqrt{1-x^2}$$

B.2. On s'intéresse ici à g sur $I =]-1, \sqrt{2}/2[$. Sur I , g est dérivable (l'argument de la racine est > 0) et

$$\forall x \in I, g'(x)g(x) = \frac{-4x}{2\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2} = -4x$$

et

$$g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I =]-1, \sqrt{2}/2[$$

B.3. Considérons la fonction

$$m : x \in]-1, 1[\mapsto 2\sqrt{1-x^2}$$

Le même calcul montre que m est encore solution de (E) mais cette fois sur $] -1, 1[$. Comme m prolonge la solution de la question précédente, cette dernière n'est pas maximale.

Pour montrer que m , il suffit de montrer que cette fonction ne peut se prolonger sur un intervalle plus grand en une fonction encore dérivable (et donc a fortiori en une fonction solution sur cet intervalle plus grand). Or, si un tel prolongement existe, c'est un prolongement par continuité et $m(1) = 0$ ou $m(-1) = 0$ et comme m' est de limite infinie en ± 1 , un corollaire des accroissements finis montre que le prolongement n'est pas dérivable (la courbe représentative admet une demi tangente-verticale). Ainsi

m est solution maximale

C.1. Soit F une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans \mathbb{R} . On considère l'équation

$$(E) : y' = F(x, y)$$

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U et si $(x_0, y_0) \in U$ alors le problème de Cauchy associé à (x_0, y_0) admet une unique solution maximale. C'est à dire qu'il existe une unique fonction y définie sur un intervalle I contenant x_0 telle que $y(x_0) = y_0, \forall x \in I, (x, y(x)) \in U$ et $y'(x) = F(x, y(x))$ et y non prolongeable sur un intervalle strictement plus grand que I en une fonction qui possède les mêmes propriétés.

C.2. Ici, on considère

$$F : (x, y) \mapsto -\frac{4x}{y}$$

F est de classe \mathcal{C}^1 sur chacun des ouverts $U_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ et $U_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{-*}$. On peut ainsi appliquer le théorème précédent avec $U = U_i$ quand $(x_0, y_0) \in U_i$.

C.3. Dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a maximalité (et unicité) d'une solution à qui on impose de rester dans l'ouvert U . Dans l'équation (E) , on n'a pas a priori besoin d'imposer $y(x) \neq 0$ pour que l'expression ait un sens. Les solutions maximales **au sens de la question C.3** ne sont donc pas **a priori** maximale pour (E) telle qu'elle est écrite dans l'énoncé.

Supposons que y soit une solution maximale de (E) définie sur un intervalle I .

- Si y ne s'annule pas alors elle reste de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires) et c'est une solution maximale au sens de la question 3.
- Sinon, y s'annule en au moins un point $x_0 \in I$ mais l'équation donne alors $x_0 = 0$. On a donc $0 \in I$ et y qui s'annule uniquement en 0. (E) donne $\forall x \in I, (y^2)'(x) = -2x$ et, en intégrant entre 0 et un élément $x \in I, y^2(x) = y^2(x) - y^2(0) = -4x^2$ ce qui ne peut avoir lieu qu'en 0. A moins de considérer que l'on puisse parler de solution sur un intervalle réduit à un point, on obtient une contradiction.

Enfin, les solutions maximales sont bien celles que l'on peut obtenir par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

C.4. Il s'agit donc de trouver les solutions maximales associées aux problèmes de Cauchy (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$. Soit y une telle solution et I son intervalle de définition. Comme ci-dessus, on a

$$\forall x \in I, y^2(x) - y_0^2 = -4x^2 + 4x_0^2$$

et on en déduit que y est de la forme $x \mapsto 2\sqrt{c^2 - x^2}$ ou $x \mapsto -2\sqrt{c^2 - x^2}$ (la solution maximale ne s'annule pas) avec $c > 0$. Réciproquement, ces fonctions sont solutions et l'intervalle maximal de définition de la solution est $] -c, c[$.

Remarque : on pourrait aussi utiliser la question A pour se ramener exactement au problème de Cauchy correspondant à la fonction m .

D.1. Le cours nous indique que

$$\forall x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque : on peut retrouver ce résultat, par exemple, par méthode de l'équation différentielle. On en déduit que (écrire la relation en $-x^2$ pour $\alpha = 1/2$ et multiplier par 2)

$$\forall x \in]-1, 1[, m(x) = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}n!(n-1)!} x^{2n}$$

Toujours d'après le cours, le rayon de convergence vaut 1. Pour retrouver ce point, on peut se donner $x > 0$ et poser $a_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}n!(n-1)!} x^{2n}$. On a alors $\forall n \geq 1, a_n \neq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)2n}{4(n+1)n} x^2 \rightarrow 1$$

Par règle de D'Alembert $\sum(a_n)$ converge absolument si $x \in]0, 1[$ et diverge grossièrement si $x > 1$ ce qui nous redonne le résultat sur le rayon de convergence.

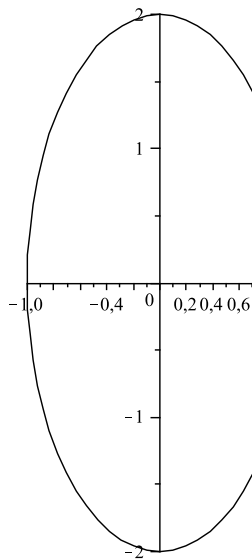
D.2. On a alors

$$\forall x \in]-c, c[, 2\sqrt{c^2 - x^2} = cm\left(\frac{x}{c}\right) = 2c + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{c^{2n-1}4^{n-1}n!(n-1)!} x^{2n}$$

et comme ci-dessus on a une série entière de rayon de convergence égal à c .

3 Des courbes pour la lettre "C".

A.1. Comme dit plus haut, \mathcal{C} est un morceau d'ellipse.



A.2.

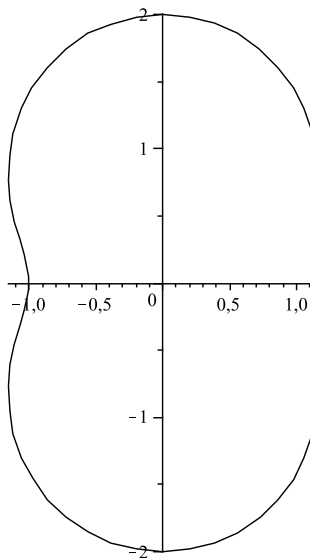
- \mathcal{C} n'est pas un ouvert puisque $(-1, 0) \in \mathcal{C}$ n'est pas intérieur à \mathcal{C} (toute boule centrée sur $(-1, 0)$ contient des points d'ordonnée < 0).
- \mathcal{C} est l'image par γ de l'intervalle $[\pi/4, 7\pi/4]$. C'est donc l'image continue d'un compact et en tant que telle, c'est un compact. \mathcal{C} est donc une partie fermée et bornée.
- \mathcal{C} n'est pas convexe car le segment reliant $(-1, 0) \in \mathcal{C}$ et $(0, 2) \in \mathcal{C}$ n'est pas inclus dans \mathcal{C} .

B.1. On a

$$\forall t, \rho(t) = \sqrt{\cos(t)^2 + 4 \sin(t)^2} = \sqrt{1 + 3 \sin(t)^2}$$

B.2. Voici la commande et le tracé Maple

```
plot([sqrt(1+3*sin(t)^2), t, t=Pi/4..7*Pi/4], coords=polar, scaling=constrained);
```



Ceci m'évoque la lettre ω tournée de $-\pi/4$ mais aussi la lettre ε . On peut aussi, avec beaucoup d'imagination, voir une lettre "C" se serrant la ceinture.

B.3. On a bien sur

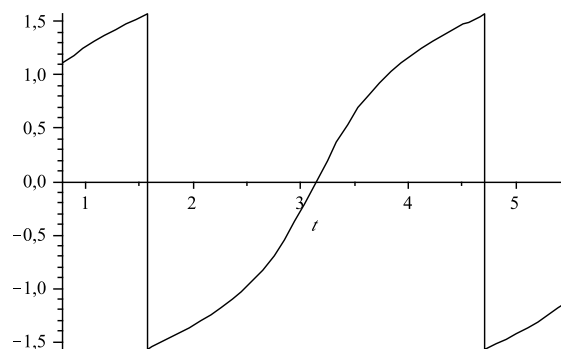
$$\forall t \in [\pi/4, 7\pi/4], t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \tan(\theta(t)) = \frac{2 \sin(t)}{\cos(t)} = 2 \tan(t)$$

Comme $\gamma(\pi/2) = (0, 2)$ et $\gamma(3\pi/2) = (0, -2)$, $\theta(\pi/2) = \pi/2$ et $\theta(3\pi/2) = 3\pi/2$ et la tangente n'est pas définie.

B.4. \arctan étant définie sur \mathbb{R} , il y a problème de définition pour $u(t) = \arctan(2 \tan(t))$ quand il y a problème de définition pour $\tan(t)$. Ici, u est définie sur $D = [\pi/4, 7\pi/4] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$ et

$$\forall t \in D, u'(t) = 2 \frac{1 + \tan^2(t)}{1 + 4 \tan^2(t)}$$

On obtient une fonction croissante sur chacun des intervalles constituant D . On a aussi existence d'une limite à droite et gauche pour u en $\pi/2$ et $3\pi/2$ (égale à $\pm\pi/2$) selon le point et le sens). Comme $u'(t)$ admet aussi une limite à droite et gauche en ces points (égale à 1), on a existence de demi-tangentes de pente 1 (corollaire des accroissements finis) et on obtient la courbe suivante.



Pour un raccord continu, il suffit de “translater des bouts de courbes”. On s’arrange pour tomber entre $\pi/4$ et $7\pi/4$. et donc de poser

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[, \theta(t) = \arctan(2 \tan(t))$$

$$\theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall t \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[, \theta(t) = \arctan(2 \tan(t)) + \pi$$

$$\theta\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

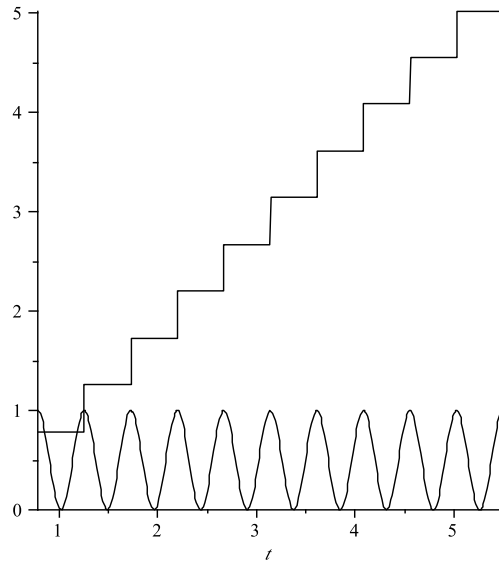
$$\forall t \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[, \theta(t) = \arctan(2 \tan(t)) + 2\pi$$

B.5. La suite de commandes

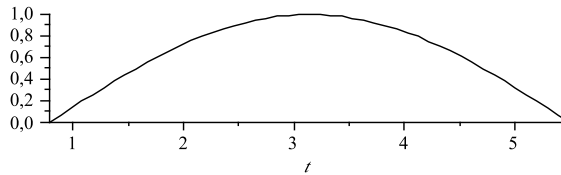
```
theta:=t->piecewise(t<Pi/2,arctan(2*tan(t)),t<3*Pi/2,arctan(2*tan(t))+Pi,
                    arctan(2*tan(t))+2*Pi);
plot([sqrt(1+3*sin(t)^2),theta(t),t=Pi/4..7*Pi/4],coords=polar,scaling=constrained);
nous redonne la courbe C.
```

C.1. ω est de classe \mathcal{C}^∞ et $\frac{3\pi}{n}$ périodique. A “contraction” et translation près, elle se comporte comme \cos^2 .

De même, α se comporte presque comme la partie entière et a un graphe “en escalier”. On a discontinuité quand $t = \frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{3\pi}{2n}$.



C.2.



C.3. Le caractère constant par morceaux de $t \mapsto \alpha(n, t)$ nous indique que la figure D est la bonne (le graphe présente des segment inclus dans des droites polaires $\theta = c^{te}$).

C.4. J'utilise `display` pour mettre les graphes sur le même schéma et l'option `insequence=true` pour créer l'animation.

```
with(plots);
display([seq(plot([w(n,t),theta(alpha(n,t)),t=Pi/4..7*Pi/4],coords=polar),n=1..100)],
        insequence=true);
```

D.1. Soit $\omega = P dx + Q dy$ une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 et Γ l'arc de \mathbb{R}^2 défini paramétriquement par $t \in [a, b] \mapsto M(t)$. On suppose l'arc Γ fermé et sans point multiples (hormis $\phi(a) = \phi(b)$). On a alors, K étant le compact délimité par Γ ,

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\Gamma} \omega = \int_a^b \omega(M(t))(M'(t)) dt$$

et cette formule permet de calculer des surfaces :

$$\iint_K dx dy = \int_{\Gamma} x dy = - \int_{\Gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx)$$

D.2. Dans le cas d'un paramétrage en polaire $t \mapsto \sigma(t)e^{i\mu(t)}$ on a $x(t) = \sigma(t) \cos(\mu(t))$ et $y(t) = \sigma(t) \sin(\mu(t))$ et donc $x(t)d(y(t)) - y(t)d(x(t)) = \sigma(t)^2 \mu'(t)$. Ainsi,

$$\iint_K dx dy = \frac{1}{2} \int_a^b \sigma(t)^2 \mu'(t) dt$$

D.3. On pose $d(t) = \arctan(2 \tan(t))$. On a alors $d'(t) = \frac{2+2 \tan^2(t)}{1+4 \tan^2(t)} = \frac{2}{1+3 \sin^2(t)}$ et ainsi

$$\frac{1}{2}(1 + 3 \sin^2(t))d'(t) = 1$$

D.4. On obtient \mathcal{A} comme différence de deux aires (puisque \mathcal{H} est la différence de deux domaines) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \rho(t)^2 (1 + \psi(t))^2 \theta'(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{7\pi/4} \rho(t)^2 \theta'(t) dt$$

Avec la question précédente (et $\theta'(t) = d'(t)$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ce qui ne change rien au calcul de l'intégrale) on a donc (calcul avec Maple)

$$\mathcal{A} = \int_{\pi/4}^{7\pi/4} (2\psi(t) + \psi(t)^2) dt = \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{64}$$