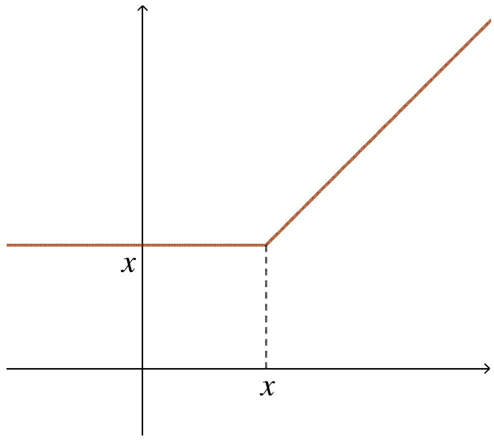
Corrigé du DM n° 10

Exercice 5 - E3A - Maths1 - PSI - 2016

1.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_x(t) = \max(x,t) = \begin{cases} x & \text{quand } t \leq x \\ t & \text{quand } t \geq x \end{cases}$$

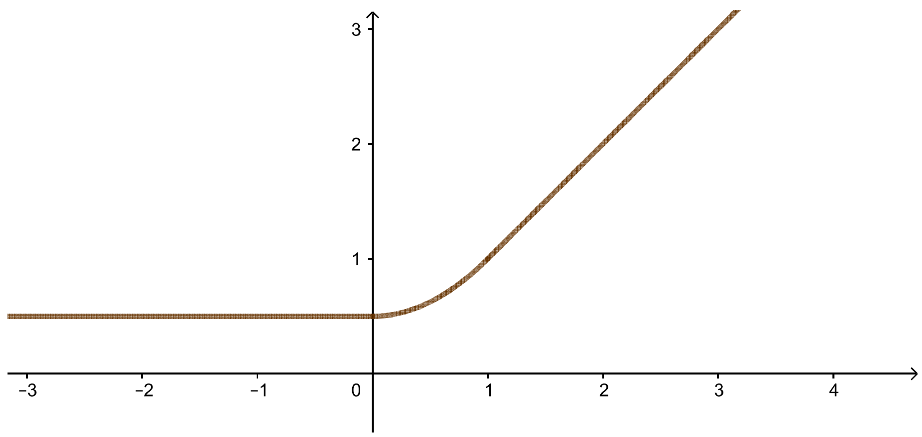
On obtient la courbe :



1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \int_0^1 \max(x,t)\,dt = \begin{cases} \int_0^1 t\,dt & \text{quand } x \leq 0 \\ \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt & \text{quand } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_0^1 x\,dt & \text{quand } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{quand } x \leq 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{quand } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{quand } x \geq 1 \end{cases}$$

1.3. On obtient la courbe :



2. Si X suit une loi géométrique, alors $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc pour tout $\omega\in\Omega$, on a $X(\omega)\geq 1$ et :

$$Y(\omega)=\int_0^1 \max\left(X(\omega),t\right)dt=\Phi\left(X(\omega)\right)=X(\omega).$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall\,\omega\in\Omega,\ Y(\omega)=X(\omega).}$$

3.1. Voir le cours.

3.2. Soit $\omega\in\Omega$.

- Si $X(\omega)=0$, alors $Y(\omega)=\Phi\left(X(\omega)\right)=\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$.
- Si $X(\omega)\in[\![1,n]\!]$, alors $Y(\omega)=\Phi\left(X(\omega)\right)=X(\omega)$.

Donc :

$$\boxed{Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup[\![1,n]\!]\quad\text{et}\quad\begin{cases}P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=P\left(X=0\right)=(1-p)^n\\[2ex]\forall\,k\in[\![1,n]\!],\ P\left(Y=k\right)=P\left(X=k\right)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\end{cases}}$$

4.1. On a $X(\Omega)=\left\{-1,0,\dfrac{1}{2},2\right\}$, donc :

$$P\left(X=-1\right)+P\left(X=0\right)+P\left(X=\frac{1}{2}\right)+P\left(X=2\right)=1.$$

Alors :

$$P\left(X=\frac{1}{2}\right)=1-P\left(X=-1\right)-P\left(X=0\right)-P\left(X=2\right)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}.$$

Soit :

$$\boxed{P\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{12}}$$

4.2. Pour tout $\omega\in\Omega$, $Y(\omega)=\Phi\left(X(\omega)\right)$, donc :

- Si $X(\omega)=-1$ ou 0, $Y(\omega)=\dfrac{1}{2}$ et $P\left(Y=\dfrac{1}{2}\right)=P\left(X=-1\right)+P\left(X=0\right)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$.
- Si $X(\omega)=\dfrac{1}{2}$, $Y(\omega)=\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}+1\right)=\dfrac{5}{8}$ et $P\left(Y=\dfrac{5}{8}\right)=P\left(X=\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{12}$.
- Si $X(\omega)=2$, $Y(\omega)=\Phi(2)=2$ et $P\left(Y=2\right)=P\left(X=2\right)=\dfrac{1}{3}$.

On a donc $Y(\Omega)=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{8},2\right\}$ et la loi de probabilité de Y est résumée dans le tableau suivant :

$Y(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	2
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

On a alors :

$$E(Y)=\frac{1}{2}P\left(Y=\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{8}P\left(Y=\frac{5}{8}\right)+2P(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}.$$

Soit :

$$\boxed{E(Y)=\frac{101}{96}}$$

4.3. Pour tout $\omega\in\Omega$, $Z(\omega)=X(\omega)Y(\omega)$, donc :

- Si $X(\omega)=-1$, $Y(\omega)=\frac{1}{2}$ et $Z(\omega)=-\frac{1}{2}$.
- Si $X(\omega)=0$, $Y(\omega)=\frac{1}{2}$ et $Z(\omega)=0$.
- Si $X(\omega)=\frac{1}{2}$, $Y(\omega)=\frac{5}{8}$ et $Z(\omega)=\frac{5}{16}$.
- Si $X(\omega)=2$, $Y(\omega)=2$ et $Z(\omega)=4$.

On a donc bien :

$$\boxed{Z(\Omega)=\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{5}{16},4\right\}}$$

De plus, pour tout $x\in Z(\Omega)$, on a $P(Z=x)=P(X=x)$, d'où la loi de probabilité de Z résumée dans le tableau ci-dessous :

$X(\omega)$	-1	0	$\frac{1}{2}$	2
$Z(\omega)$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{16}$	4
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

4.4. On a :

$$E(X)=(-1)\times P(X=-1)+0\times P(X=0)+\frac{1}{2}\times P\left(X=\frac{1}{2}\right)+2\times P(X=2)=\frac{3}{4}$$

$$E(XY)=E(Z)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times P\left(Z=-\frac{1}{2}\right)+0\times P(Z=0)+\frac{5}{16}\times P\left(Z=\frac{5}{16}\right)+4\times P(Z=4)=\frac{269}{192}$$

Avec $E(Y)=\frac{101}{96}$, on obtient :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{269}{192}-\frac{3}{4}\times\frac{101}{96}=\frac{235}{384}$$

Par ailleurs :

$$E(X^2)=(-1)^2\times P(X=-1)+0^2\times P(X=0)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times P\left(X=\frac{1}{2}\right)+2^2\times P(X=2)=\frac{25}{16}$$

$$E(Y^2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 P\left(Y=\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{8}\right)^2 P\left(Y=\frac{5}{8}\right)+2^2 P(Y=2)=\frac{399}{256}$$

Donc :

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{25}{16}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{399}{256}-\left(\frac{101}{96}\right)^2=\frac{4163}{9216}$$

Donc :

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}=\frac{\frac{235}{384}}{\sqrt{\frac{4163}{9216}}}=\frac{235}{4\sqrt{4163}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\rho(X,Y)=\frac{235}{4\sqrt{4163}}\approx 0,91}$$

Exercice 3 - E3A - PSI - 2017

1. On suppose que les variables X_i admettent une espérance (toutes la même car elles suivent la même loi).

On a alors, pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $E(X_i)=E(X_0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} nP(X_i=n)$ et la série $\sum |n|\,P(X_i=n)$ converge.

Pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, on pose $Y_j=\sum_{i=0}^{j} X_i$. On a $Y_j(\Omega)=\mathbb{Z}$ et Y_j admet alors une espérance, donc la série $\sum |n|\,P(Y_j=n)$ converge et par linéarité :

$$E(Y_j)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} nP(Y_j=n)=\sum_{i=0}^{j} E(X_i)=\sum_{i=0}^{j} E(X_0)=(j+1)E(X_0).$$

On a $Y(\Omega)=\mathbb{Z}$ et, comme la famille $\big((T=j)\big)_{j\in[\![0,k]\!]}$ forme un système complet d'évènements (car $T(\Omega)=[\![0,k]\!]$), la loi des probabilités totales permet d'écrire pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$P(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)P_{(T=j)}(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)P_{(T=j)}(Y_j=n).$$

De plus, comme $T, X_0, \dots, X_k$ sont mutuellement indépendantes, T et $Y_j=X_0+\dots+X_j$ sont indépendantes, donc $P_{(T=j)}(Y_j=n)=P(Y_j=n)$ et :

$$P(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)P(Y_j=n).$$

Alors, pour tous $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $a\le b$, on a :

$$\sum_{n=a}^{b}|n|P(Y=n)=\sum_{n=a}^{b}|n|\left(\sum_{j=0}^{k}P(T=j)P(Y_j=n)\right)=\sum_{n=a}^{b}\sum_{j=0}^{k}|n|P(T=j)P(Y_j=n)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=a}^{b}|n|P(T=j)P(Y_j=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum_{n=a}^{b}|n|P(Y_j=n)\right)$$

Or, on vu que pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, $\sum|n|P(Y_j=n)$ converge, donc $\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum|n|P(Y_j=n)\right)$ converge et ainsi :

$$\boxed{\text{Si les } X_i \text{ admettent une espérance, } Y \text{ aussi.}}$$

2. D'après ce qui précède, on a pour tous $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $a\le b$:

$$\sum_{n=a}^{b}n\,P(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum_{n=a}^{b}n\,P(Y_j=n)\right).$$

Donc :

$$E(Y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\,P(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\,P(Y_j=n)\right)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)E(Y_j).$$

Or, on a vu que pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, $E(Y_j)=(j+1)E(X_0)$, donc :

$$E(Y)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)(j+1)E(X_0)=\left[\sum_{j=0}^{k}(j+1)P(T=j)\right]E(X_0)$$
$$=\left[\sum_{j=0}^{k}j\,P(T=j)+\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\right]E(X_0)=\left[E(T)+1\right]E(X_0)$$

Ainsi, si les X_i admettent une espérance :

$$\boxed{E(Y)=\left(E(T)+1\right)E(X_0)}$$

3. On suppose que $E(X_0)=0$, donc d'après ce qui précède, $E(Y_j)=0$ pour tout $j\in[\![0,k]\!]$.

Comme $E(X_0^2)$ existe, $E(X_i^2)$ existe pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, car les X_i suivent la même loi. Alors, les X_i admettent une variance, toutes la même, donnée par :

$$V(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=E(X_i^2).$$

Comme les X_i sont indépendantes, Y_j admet une variance pour tout $j\in[\![0,k]\!]$ et :

$$V(Y_j)=\sum_{i=0}^{j}V(X_i)=\sum_{i=0}^{j}V(X_0)=(j+1)V(X_0).$$

On a alors, pour tous $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $a\leq b$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b}n^2P(Y=n)&=\sum_{n=a}^{b}n^2\left(\sum_{j=0}^{k}P(T=j)P(Y_j=n)\right)=\sum_{n=a}^{b}\sum_{j=0}^{k}n^2P(T=j)P(Y_j=n)\\&=\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=a}^{b}n^2P(T=j)P(Y_j=n)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum_{n=a}^{b}n^2P(Y_j=n)\right)\end{aligned}$$

Or, $V(Y_j)=E(Y_j^2)-E(Y_j)^2=E(Y_j^2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2P(Y_j=n)$, donc la série $\sum n^2P(Y=n)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes, et :

$$\begin{aligned}E(Y^2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2P(Y=n)&=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2P(Y_j=n)\right)=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)V(Y_j)\\&=\sum_{j=0}^{k}P(T=j)(j+1)V(X_0)=V(X_0)\left(\sum_{j=0}^{k}P(T=j)(j+1)\right)\\&=V(X_0)\left(\sum_{j=0}^{k}jP(T=j)+\sum_{j=0}^{k}P(T=j)\right)=V(X_0)\big(E(T)+1\big)\end{aligned}$$

Ainsi, Y^2 admet une espérance, donc Y admet une variance, donnée par :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=V(X_0)\big(E(T)+1\big)-\Big[\big(E(T)+1\big)E(X_0)\Big]^2.$$

Soit :

$$\boxed{V(Y)=V(X_0)\big(E(T)+1\big)}$$