Corrigé du DS n° 6

PROBLÈME 1

Partie I - Endomorphismes

Voir le corrigé du DS n ° 3.

Partie II - Une équation différentielle

Q13. Sur $I = \left]0,+\infty\right[$ ou $J = \left]-\infty,0\right[$, l'équation (2) se récrit :

$$y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{b}{x^2} y = 0 \qquad (3).$$

L'équation (3) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 normalisée, donc :

> L'ensemble des solutions sur *I* ou *J* de (3), donc de (2), est un espace vectoriel de dimension 2.

Q14. Soit *y* une solution de (2) sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto e^t$ réalise une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans *I*. Comme *y* est deux fois dérivable sur *I* (car solution de (2)), $g : t \mapsto y(e^t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = e^t y'(e^t)$$
$$g''(t) = e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) = e^{2t} y''(e^t) + g'(t)$$

Or, pour tout $x \in I$, $x^2 y''(x) + a x y'(x) + b y(x) = 0$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t \in I$ et :

$$e^{2t} y''(e^t) + a e^t y'(e^t) + b y(e^t) = 0.$$

Soit :

$$g''(t) - g'(t) + a g'(t) + b g(t) = 0 \iff g''(t) + (a-1) g'(t) + b g(t) = 0.$$

Ainsi :

> Si *y* une solution de (2) sur *I*, $g : t \mapsto y(e^t)$ est solution de (3) : $u'' + (a-1)u' + bu = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Q15. Soit *g* une solution de (3) sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de classe C^∞ de *I* dans $\mathbb{R}$. Comme *g* est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, (car solution de (3)), $h : x \mapsto g(\ln x)$ est deux fois dérivable sur *I* et, pour tout $x \in I$:

$$\begin{cases} h'(x) = \dfrac{1}{x} g'(\ln x) \\ h''(x) = \dfrac{1}{x^2} g''(\ln x) - \dfrac{1}{x^2} g'(\ln x) \end{cases} \iff \begin{cases} g'(\ln x) = x h'(x) \\ g''(\ln x) = x^2 h''(x) + x h'(x) \end{cases}$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) + (a-1) g'(t) + g(t) = 0$, donc pour tout $x \in I$, $\ln x \in \mathbb{R}$ et :

$$g''(\ln x) + (a-1) g'(\ln x) + b g(\ln x) = 0 \iff x^2 h''(x) + x h'(x) + (a-1)\, x h'(x) + b h(x) = 0.$$

Soit :

$$x^2h''(x)+axh'(x)+bh(x)=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } g \text{ est solution de (3) sur } \mathbb{R}\text{, } x\mapsto g(\ln x) \text{ est solution de (2) sur } I.}$$

Q16. Si $a=3$ et $b=1$, l'équation (3) devient $u''+2u'+u=0$ qui est linéaire, homogène, d'ordre 2, à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+1=0$, de racine double – 1. Les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $t\mapsto(\alpha t+\beta)e^{-t}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

D'après la question précédente, $y:x\mapsto(\alpha\ln x+\beta)e^{-\ln x}=\dfrac{\alpha\ln x+\beta}{x}$ est alors solution de (2) sur I et d'après la question 14, si y est solution de (2) sur I, alors $t\mapsto y(e^t)$ est solution de (3) sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $y(e^t)=\dfrac{\alpha t+\beta}{e^t}=\dfrac{\alpha\ln(e^t)+\beta}{e^t}$, soit pour tout $x\in I$, $y(x)=\dfrac{\alpha\ln x+\beta}{x}$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Quand } a=3 \text{ et } b=1\text{, les solutions de (2) sur } I \text{ sont les fonctions } x\mapsto\frac{\alpha\ln x+\beta}{x} \text{ avec } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Si $a=1$ et $b=4$, l'équation (3) devient $u''+4u=0$ qui est linéaire, homogène, d'ordre 2, à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2+4=0$, de racines $2i$ et $-2i$. Les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $t\mapsto\alpha\cos 2t+\beta\sin 2t$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Avec un raisonnement identique à celui que l'on vient de faire, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{Si } a=1 \text{ et } b=4\text{, les solutions de (2) sur } I \text{ sont les fonctions } x\mapsto\alpha\cos(2\ln x)+\beta\sin(2\ln x) \text{ avec } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.}$$

Q17. Ici $a=1$ et $b=-4$.

Soit y une solution de (2) sur $J=\mathbb{R}_-^*$.

La fonction $t\mapsto -e^t$ réalise une bijection de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans J. Comme y est deux fois dérivable sur J (car solution de (2)), $h:t\mapsto y(-e^t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&h'(t)=-e^t y'(-e^t)\\&h''(t)=e^{2t}y''(-e^t)-e^t y'(-e^t)\quad\Rightarrow\quad e^{2t}y''(-e^t)=h''(t)-h'(t)\end{aligned}$$

Or, pour tout $x\in J$, $x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=0$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$, $-e^t\in J$ et :

$$e^{2t}y''(-e^t)-ae^t y'(-e^t)+by(-e^t)=0\quad\Leftrightarrow\quad h''(t)+(a-1)h'(t)+bh(t)=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } y \text{ une solution de (2) sur } J\text{, } h:t\mapsto y(-e^t) \text{ est solution de (3) sur } \mathbb{R}.}$$

Q18. Si $a=1$ et $b=-4$, l'équation (3) devient $u''-4u=0$ qui est linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants et homogène. L'équation caractéristique associée est $r^2-4=0$, de racines 2 et – 2. Les solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $t\mapsto\alpha e^{2t}+\beta e^{-2t}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

On prouve alors comme dans la question 16 que pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x\mapsto \alpha e^{2\ln x}+\beta e^{-2\ln x}=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x^2}$ est solution de (2) sur I et comme $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ ne sont pas proportionnelles, ces deux fonctions forment une bases de l'ensemble des solutions de (2) sur I qui est un espace vectoriel de dimension 2.

On montre de même que $\left(x\mapsto x^2, x\mapsto\dfrac{1}{x^2}\right)$ est une base de l'ensemble des solutions de (2) sur J.

Soit maintenant une éventuelle solution y de (2) sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme y est solution de (2) sur I et sur J, il existe quatre réels α, β, γ et δ tels que :

$$\begin{cases}\forall\, x\in I,\ y(x)=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x^2}\\ \forall\, x\in J,\ y(x)=\gamma x^2+\dfrac{\delta}{x^2}\end{cases}$$

Si y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$, elle est deux fois dérivable en 0, donc :

- y est continue en 0, donc $\lim\limits_{0^-} y=\lim\limits_{0^+} y\in\mathbb{R}$, d'où $\beta=\delta=0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} y(x)=\lim\limits_{x\to0^+} y(x)=0=y(0)$;
- $\begin{cases}\forall\, x\in I,\ y'(x)=2\alpha x\\ \forall\, x\in J,\ y'(x)=2\gamma x\end{cases}$ donc $\lim\limits_{0^-} y'=\lim\limits_{0^+} y'=0$ et y est C^1 avec $y'(0)=0$;
- y' est dérivable en 0, donc $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{y'(x)-y'(0)}{x}\in\mathbb{R}$, d'où $\alpha=\gamma$ et $y''(0)=\alpha$.

Ainsi, $y(x)=\alpha x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $y: x\mapsto\alpha x^2$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2y''(x)+xy'(x)-4y(x)=x^2(2\alpha)+x(2\alpha x)-4\alpha x^2=0.$$

Donc, y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ et finalement :

$$\boxed{\text{Quand } a=1 \text{ et } b=-4\text{, les solutions de (2) sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions } x\mapsto\alpha x^2 \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}.}$$

Partie III - Une équation de Bessel

Q19. Voir le cours.

Q20. On a $J_0(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ avec $c_0=f(0)=1$.

La fonction J_0 est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ (car développable en série entière sur $]-R,R[$) et pour tout $x\in\,]-R,R[$, on a :

$$J_0'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_nx^{n-1}$$

$$J_0''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

Comme J_0 est solution de (4) sur $]-R,R[$, on a pour tout $x\in\,]-R,R[$:

$$\begin{aligned}
x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x)=0 \quad &\Leftrightarrow\quad x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nc_nx^{n-1}+x^2\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^{n+2}=0\\
&\Leftrightarrow\quad \sum_{n=0}^{+\infty}n^2c_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^{n+2}=0\\
&\Leftrightarrow\quad c_1x+\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)^2c_{n+2}+c_n\right)x^{n+2}=0
\end{aligned}$$

Ceci donne $c_1=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n+2)^2c_{n+2}+c_n=0 \quad\Leftrightarrow\quad c_{n+2}=-\frac{1}{(n+2)^2}c_n\,.$$

Prouvons alors par récurrence sur k que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} c_{2k+1}=0\\ c_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}\end{cases}$$

Pour $k=0$, on a $c_1=0$ et $c_0=1=\dfrac{(-1)^0}{4^0(0!)^2}$, donc la propriété est vraie au rang $k=0$.

Supposons la propriété vraie à un rang $k\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{cases} c_{2k+2}=c_{2k+1+2}=-\dfrac{1}{(2k+3)^2}c_{2k+1}\underset{\text{par HR}}{=}0\\ c_{2k+2}=-\dfrac{1}{(2k+2)^2}c_{2k}\underset{\text{par HR}}{=}-\dfrac{1}{(2k+2)^2}\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}=\dfrac{(-1)^{k+1}}{4(k+1)^24^k(k!)^2}=\dfrac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}\left((k+1)!\right)^2}\end{cases}$$

La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\begin{cases} c_{2k+1}=0\\ c_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}\end{cases}}$$

Q20. D'après la question précédente, $J_0(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}c_{2k}x^{2k}$.

Soient $x\in\mathbb{R}^*$ et $k\in\mathbb{N}$. On a $c_{2k}x^{2k}\neq 0$ et :

$$\left|\frac{c_{2k+2}x^{2k+2}}{c_{2k}x^{2k}}\right|=\left|\frac{\dfrac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}\left((k+1)!\right)^2}x^{2k+2}}{\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}}\right|=\frac{4^k(k!)^2}{4^{k+1}\left((k+1)!\right)^2}x^2=\left(\frac{x}{4(k+1)}\right)^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}0\,.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum c_{2k}x^{2k}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ et ainsi :

$$\boxed{R=+\infty}$$

Q22. Comme $R=+\infty$, J_0 est définie et continue sur le segment $[0,r]$, donc bornée sur ce segment.

Si la famille (J_0, f) est liée, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f=\lambda J_0$ (car J_0 n'est pas nulle). Alors, comme J_0 est bornée sur $[0,r]$, donc sur $]0,r[$:

$$\boxed{f \text{ est bornée sur }]0,r[.}$$

Q23-Q26. Voir le corrigé de l'exercice 6 du TD du chapitre sur les séries entières.

Q27. On a $r>0$ et λ de classe C^2 sur $]0,r[$.

Comme J_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction λJ_0 est de classe C^2 sur $]0,r[$ et :

$$\begin{aligned}(\lambda J_0)' &= \lambda' J_0 + \lambda J_0' \\ (\lambda J_0)'' &= \lambda'' J_0 + 2\lambda' J_0' + \lambda J_0''\end{aligned}$$

Donc, λJ_0 est solution de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si, pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$x^2(\lambda J_0)''(x) + x(\lambda J_0)'(x) + x^2(\lambda J_0)(x) = 0.$$

Et comme $0\notin\,]0,r[$, ceci revient à, pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$x(\lambda J_0)''(x) + (\lambda J_0)'(x) + x(\lambda J_0)(x) = 0.$$

Or, pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x(\lambda J_0)''(x) + (\lambda J_0)'(x) + x(\lambda J_0)(x) \\ &= x\left[\lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)\right] + \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x) + x\lambda(x)J_0(x) \\ &= x\lambda''(x)J_0(x) + 2x\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)\left[xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)\right]\end{aligned}$$

Comme J_0 est solution de (4), on a $xJ_0''(x)+J_0'(x)+xJ_0(x)=0$, ce qui donne, pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$\varphi(x) = x\lambda''(x)J_0(x) + 2x\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x).$$

Ainsi, λJ_0 est solution de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si, pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$\varphi(x) = x\lambda''(x)J_0(x) + 2x\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x) = 0.$$

Par ailleurs, la fonction $h : x\mapsto x\lambda'(x)J_0^2(x)$ est de classe C^1 sur $]0,r[$ en tant que produit de telles fonctions et , pour tout $x\in\,]0,r[$:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \lambda'(x)J_0^2(x) + x\lambda''(x)J_0^2(x) + 2x\lambda'(x)J_0(x)J_0'(x) \\ &= J_0(x)\left[x\lambda''(x)J_0(x) + 2x\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda'(x)J_0(x)\right]. \\ &= J_0(x)\varphi(x)\end{aligned}$$

Ce dernier résultat permet d'affirmer que si λJ_0 est solution de (4) sur $]0,r[$ (donc φ est nulle sur $]0,r[$), alors h' est nulle sur $]0,r[$.

Reste à voir la réciproque : h' est nulle sur $]0,r[$ implique φ est nulle sur $]0,r[$. Ceci est immédiat si J_0 ne s'annule pas sur $]0,r[$, mais ce résultat n'a pas été prouvé

Nous allons raisonner par l'absurde en supposant que $h' = J_0\varphi = 0$ sur $]0,r[$ et qu'il existe $x_0 \in]0,r[$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. La fonction φ est continue sur $]0,r[$ en tant que somme de telles fonctions, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset]0,r[$, on a $\varphi(x) \neq 0$. Mais, alors $h' = J_0\varphi = 0$ entraine que $J_0 = 0$ sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$. Alors, $J_0' = 0$ su cet intervalle et donc $J_0(x_0) = J_0'(x_0) = 0$.

Or, J_0 est solution de (4) sur $\mathbb{R}$ et (4) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, donc le problème de Cauchy composée de (4) et des conditions initiales $J_0(x_0) = J_0'(x_0) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, qui est la fonction nulle. Or, $J_0(0) = 1 \neq 0$ donc l'existence de $x_0 \in]0,r[$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ mène à une absurdité et donc $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in]0,r[$.

Finalement, on a $h' = 0$ sur $]0,r[$ si et seulement si $\varphi = 0$ sur $]0,r[$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\lambda J_0 \text{ est solution de (4) sur }]0,r[\text{ si et seulement si } x \mapsto x\lambda'(x)J_0^2(x) \text{ est de dérivée nulle sur }]0,r[.}$$

Q28. On a vu que $J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ sur $\mathbb{R}$. Ceci implique que pour tout réel x, la série $\sum c_n x^n$ converge absolument. On peut donc utiliser la formule du produit de Cauchy de J_0 par J_0, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$. :

$$J_0^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \quad \text{avec } \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, avec $J_0(0) = 1$:

$$\boxed{J_0^2 \text{ est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini et } J_0^2(0) = 1.}$$

Q29. On a vu que $J_0^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha_0 = J_0^2(0) = 1$.

D'après les questions **Q23** à **Q26**, il existe un réel $R_\beta > 0$ et une unique fonction $J_1 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$ telle que pour tout $x \in]-R_\beta, R_\beta[$, $J_0^2(x)J_1(x) = 1$. Remarquons que :

- la fonction J_1 est la somme d'une série entière sur $]-R_\beta, R_\beta[$, donc elle y est de classe C^∞ ;
- pour tout $x \in]-R_\beta, R_\beta[$, $J_0^2(x)J_1(x) = 1$, donc $J_0^2(x) \neq 0$;
- $\beta_0 = J_1(0) = \dfrac{1}{J_0^2(0)} = 1$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{xJ_0^2(x)} = \dfrac{J_1(x)}{x}$ est définie et de classe C^∞ sur $]0, R_\beta[$, en tant que quotient de telles fonctions et pour tout $x \in]0, R_\beta[$:

$$\frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n x^n = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n x^{n-1}.$$

Soit alors λ une primitive de $x \mapsto \dfrac{J_1(x)}{x}$ sur $\left]0, R_\beta\right[$ (λ existe bien car $x \mapsto \dfrac{J_1(x)}{x}$ est continue sur $\left]0, R_\beta\right[$ est de classe C^∞ sur cet intervalle). On a alors, pour tout $x \in \left]0, R_\beta\right[$:

$$\lambda'(x) = \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{xJ_0^2(x)} \quad \Rightarrow \quad x\lambda'(x)J_0^2(x) = 1.$$

Donc, l est une fonction de classe C^∞ (donc C^2) sur $\left]0, R_\beta\right[$ telle que $x \mapsto x\lambda'(x)J_0^2(x)$ est constante, donc de dérivée nulle, sur $\left]0, R_\beta\right[$.

Alors, d'après la question **Q27**, la fonction $x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de (4) sur $\left]0, R_\beta\right[$.

Et, pour tout $x \in \left]0, R_\beta\right[$:

$$\lambda(x) = \int^x \frac{J_1(t)}{t}\,dt = \int^x \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n t^{n-1}\right) dt = \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n} x^n + k.$$

Posons alors :

$$\eta(x) = J_0(x)\left(k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n} x^n\right).$$

La fonction η est définie sur au moins $\left]-R_\beta, R_\beta\right[$, donc développable en série entière (car J_0 l'est) avec un rayon de convergence $R_\eta = R_\beta > 0$ (car $\sum \dfrac{\beta_n}{n} x^n$ et $\sum \beta_n x^n$ ont le même rayon de convergence et J_0 est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ tout entier).

On a alors, pour tout $x \in \left]0, R_\beta\right[$, $\lambda(x)J_0(x) = \eta(x) + J_0(x)\ln x$ et donc :

> Il existe une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$, telle que $x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln x$ est solution de (4) sur $\left]0, R_\eta\right[$.

Q30. L'ensemble $S_{(4)}$ des solutions de (4) sur $\left]0, R_\eta\right[$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Or, les fonctions J_0 et $J_2 : x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln x$ sont toutes deux solutions de (4). De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = \eta(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} J_0(x) = J_0(0) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} J_2(x) = -\infty$, ce qui prouve que J_2 n'est pas bornée au voisinage de 0.

D'après la question **Q22**, la famille $\left(J_0, J_2\right)$ est alors libre, donc c'est est une base de $S_{(4)}$ et ainsi :

> L'ensemble des solutions de (4) sur $\left]0, R_\eta\right[$ est $\operatorname{Vect}\left(J_0,\, x \mapsto \eta(x) + J_0(x)\ln x\right)$.

PROBLÈME 2

Q31. On a $X(\Omega)\subset[-1,1]$ et $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Dans le premier cas, X admet une espérance qui est la somme *finie* $\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Dans le second cas, on peut écrire $X(\Omega)=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\subset[-1,1]$ et X admet une espérance si est seulement si la série $\sum x_n P(X=x_n)$ converge absolument.

Or, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_n P(X=x_n)|\leq P(X=x_n)$ et $\sum P(X=x_n)$ converge (de somme 1), donc la série $\sum |x_n P(X=x_n)|$ converge et X admet une espérance.

Finalement, dans les deux cas :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$$

Q32. Voir le cours.

Q33. Comme $X(\Omega)\subset[-1,1]$, on a $|X|(\Omega)\subset[0,1]$. On prouve donc comme dans la question 31 que $|X|$ admet une espérance. De plus, $|X|$ est positive. On peut donc appliquer l'inégalité de Markov, soit pour tout réel $\alpha>0$:

$$\boxed{P(|X|\geq\alpha)\leq\frac{E(|X|)}{\alpha}}$$

Q34. Soient des réels $t>0$ et $\varepsilon>0$, et $n\in\mathbb{N}^*$. On a $tn>0$, donc pour tout $\omega\in\Omega$:

$$S_n(\omega)\geq\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad e^{tnS_n(\omega)}\geq e^{tn\varepsilon}.$$

Ainsi :

$$(S_n\geq\varepsilon)=\left(e^{tnS_n}\geq e^{tn\varepsilon}\right).$$

Comme $X(\Omega)\subset[-1,1]$, on a pour tout $x\in X(\Omega)$, $|e^{tx}P(X=x)|=e^{tx}P(X=x)\leq e^{t}P(X=x)$ et $\sum e^{t}P(X=x)$ converge (de somme e^{t}), donc $\sum |e^{tx}P(X=x)|$ converge et ainsi, e^{tX} admet une espérance. Les X_i suivent toutes la même loi que X, donc pour tout $i\in\mathbb{N}^*$, e^{tX_i} admet une espérance et $E(e^{tX_i})=E(e^{tX})$.

Enfin, $e^{tnS_n}=e^{tX_1+tX_2+\ldots+tX_n}=e^{tX_1}e^{tX_2}\ldots e^{tX_n}$ et comme les variables X_n sont mutuellement indépendantes, les variables e^{tX_n} le sont aussi et donc e^{tnS_n} admet une espérance avec :

$$E\left(e^{tnS_n}\right)=E\left(e^{tX_1}\right)E\left(e^{tX_2}\right)\ldots E\left(e^{tX_n}\right)=\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n.$$

Ainsi, comme e^{tnS_n} est positive et admet une espérance, on peut appliquer l'inégalité de Markov, soit, pour tout réel $\alpha>0$:

$$P\left(e^{tnS_n}\geq\alpha\right)\leq\frac{E\left(e^{tnS_n}\right)}{\alpha}=\frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{\alpha}.$$

Avec $\left(S_n \geq \varepsilon\right) = \left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right)$ et $\alpha = e^{tn\varepsilon} > 0$, on obtient :

$$\boxed{P\left(S_n \geq \varepsilon\right) = P\left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right) \leq \frac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}}$$

Q35. On prend $a > 1$.

La fonction $g_a : x \mapsto \frac{1}{2a}(1-x) + \frac{a}{2}(1+x) - e^{x\ln a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence d'une fonction affine ($x \mapsto \frac{1}{2a}(1-x) + \frac{a}{2}(1+x)$) et d'une fonction exponentielle ($x \mapsto e^{x\ln a}$) avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_a'(x) = -\frac{1}{2a} + \frac{a}{2} - (\ln a)e^{x\ln a}.$$

Comme $a > 1$, donc $\ln a > 0$, la fonction $x \mapsto e^{x\ln a}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Alors, $x \mapsto -(\ln a)e^{x\ln a}$ et donc g_a' sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } g_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } g_a' \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}.}$$

On a bien $g_a(1) = \frac{a}{2}2 - a^1 = 0$ et $g_a(-1) = \frac{1}{2a}2 - a^{-1} = 0$.

Remarquons que la fonction g_a' est continue donc si elle ne s'annule pas sur $[-1,1]$, elle y garde un signe constant. Ceci impliquerait alors que g_a serait strictement monotone sur $[-1,1]$, ce qui est absurde avec $g_a(-1) = g_a(1)$. Ainsi, g_a' s'annule au moins une fois en un réel α de $[-1,1]$, et comme elle est décroissante, elle est positive sur $[-1,\alpha]$ et négative sur $[\alpha,1]$. Ainsi :

- g_a est croissante sur $[-1,\alpha]$ avec $g_a(-1) = 0$, donc g_a est positive sur $[-1,\alpha]$;
- g_a est décroissante sur $[\alpha,1]$ avec $g_a(1) = 0$, donc g_a est positive sur $[\alpha,1]$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1,1],\ g_a(x) \geq 0.}$$

Q36. D'après la question précédente, on a pour tout $x \in [-1,1]$ et tout réel $a > 1$:

$$g_a(x) = \frac{1}{2a}(1-x) + \frac{a}{2}(1+x) - e^{x\ln a} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x\ln a} \leq \frac{1}{2a}(1-x) + \frac{a}{2}(1+x).$$

Avec $t = \ln a > 0$, on obtient pour tout $x \in [-1,1]$ et tout réel $t > 0$:

$$\boxed{e^{tx} \leq \frac{e^{-t}}{2}(1-x) + \frac{e^t}{2}(1+x)}$$

Q37. Soit un réel $t>0$. Par le théorème du transfert, on a $E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x\in X(\Omega)} e^{tx}P(X=x)$.

Or, on a $X(\Omega)\subset[-1,1]$, donc pour tout $x\in X(\Omega)$, on peut écrire avec le résultat de la question précédente et $P(X=x)\geq 0$:

$$E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x\in X(\Omega)} e^{tx}P(X=x)\leq \sum_{x\in X(\Omega)}\left(\frac{e^{-t}}{2}(1-x)+\frac{e^{t}}{2}(1+x)\right)P(X=x).$$

Et :

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X(\Omega)}\left(\frac{e^{-t}}{2}(1-x)+\frac{e^{t}}{2}(1+x)\right)P(X=x)&=\sum_{x\in X(\Omega)}\left((\operatorname{ch} t)P(X=x)+(\operatorname{sh} t)\,xP(X=x)\right)\\&=\operatorname{ch} t\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)+\operatorname{sh} t\sum_{x\in X(\Omega)}xP(X=x).\\&=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t\,E(X)\end{aligned}$$

Donc :

$$E\left(e^{tX}\right)\leq \operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t\,E(X).$$

Or, X est centrée, donc $E(X)=0$ et ainsi :

$$\boxed{E\left(e^{tX}\right)\leq \operatorname{ch} t}$$

Q38. Soient $k\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. On veut :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!}\leq\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k=\frac{t^{2k}}{2^k k!}.$$

Comme $t^{2k}\geq 0$, $(2k)!>0$ et $2^k k!>0$, ceci revient à prouver que $2^k k!\leq(2k)!$.

Or, pour $k=0$, on a $2^0 0!=(2\times 0)!=1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\frac{(2k)!}{2^k k!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n-2)\times(2n-1)\times(2n)}{2\times4\times\ldots\times(2n-2)\times(2n)}=1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\geq 1.$$

Donc, $2^k k!\leq(2k)!$ et finalement, on a bien pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{t^{2k}}{(2k)!}\leq\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}$$

On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}$ et $e^t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$, donc $e^{t^2/2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k$.

Alors :

$$\operatorname{ch} t=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k=e^{t^2/2}.$$

Et ainsi, pour tout réel $t>0$:

$$\boxed{E\left(e^{tX}\right)\leq e^{t^2/2}}$$

Q39. On a $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$t^2 - 2t\varepsilon = (t-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2 \geq -\varepsilon^2$$

avec égalité quand $t = \varepsilon$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp\left(-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}\right) \geq \exp\left(-n\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

avec égalité quand $t = \varepsilon$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}} \text{ admet } e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}} \text{ pour minimum sur } \mathbb{R} \text{ atteint en } t = \varepsilon.}$$

Q40. Pour tout réel $t > 0$, on a :

- $P(S_n \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\left(E\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}$ (d'après la question 34) ;
- $E\left(e^{tX}\right) \leq e^{t^2/2}$ (d'après la question 38).

Donc :

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{\left(e^{t^2/2}\right)^n}{e^{tn\varepsilon}} = e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}.$$

Et d'après la question précédente, $e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}} \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, donc :

$$\boxed{P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}}$$

On a $\left(|S_n| \geq \varepsilon\right) = (S_n \geq \varepsilon) \cup (S_n \leq -\varepsilon)$ et comme $\varepsilon > 0$, l'union est disjointe, donc :

$$P\left(|S_n| \geq \varepsilon\right) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(S_n \leq -\varepsilon) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon).$$

On a $-S_n = \dfrac{(-X_1) + \ldots + (-X_n)}{n}$ et :

- X est à valeurs dans $[-1,1]$, donc $-X$ aussi ;
- les X_i sont mutuellement indépendantes, donc les $-X_i$ aussi ;
- les X_i suivent la loi de X, donc les $-X_i$ suivent la loi de $-X$;
- $E(X) = 0$ donc $E(-X) = -E(X) = 0$.

Ainsi, $-S_n$ vérifie les mêmes hypothèses que S_n donc on peut lui appliquer le résultat précédent, soit $P(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$. On obtient alors :

$$P\left(|S_n| \geq \varepsilon\right) = P(S_n \geq \varepsilon) + P(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}} + e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Soit :

$$\boxed{P\left(|S_n| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}}$$

Q41. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(|S_n| > \varepsilon\right) \subset \left(|S_n| \geq \varepsilon\right)$, donc :

$$0 \leq P\left(|S_n| > \varepsilon\right) \leq P\left(|S_n| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$$

Or, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a $0 < e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} < 1$, donc la série géométrique $\sum (e^{-\varepsilon^2/2})^n$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut alors conclure que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } P\left(|S_n| > \varepsilon\right) \text{ converge.}}$$

Q42. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\{\omega \in \Omega \,;\, |S_m(\omega)| > \varepsilon\right\} = \left(|S_m| > \varepsilon\right)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \left(|S_m| > \varepsilon\right).$$

Par définition d'une variable aléatoire, on a $\left(S_m = x\right) \in \mathcal{A}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in S_m(\Omega)$.

Or, on peut écrire $\left(|S_m| > \varepsilon\right) = \bigcup\limits_{\substack{x \in S_m(\Omega) \\ x > \varepsilon}} \left(S_m = x\right)$ et par définition d'une tribu, toute réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient encore à $\mathcal{A}$. Comme $S_m(\Omega)$ est fini ou dénombrable (car les X_i sont des variables discrètes), on a $\left(|S_m| > \varepsilon\right) \in \mathcal{A}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, B_n est une réunion dénombrable de $\left(|S_m| > \varepsilon\right)$, donc $B_n \in \mathcal{A}$, autrement dit :

$$\boxed{B_n \text{ est un événement.}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \bigcup\nolimits_{m \geq n} \left(|S_m| > \varepsilon\right) = \left(|S_n| > \varepsilon\right) \cup \left[\bigcup\nolimits_{m \geq n+1} \left(|S_m| > \varepsilon\right)\right] = \left(|S_n| > \varepsilon\right) \cup B_{n+1}.$$

Donc $B_{n+1} \subset B_n$ et par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq P(B_n) = P\left(\bigcup\nolimits_{m \geq n} \left(|S_m| > \varepsilon\right)\right) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} P\left(|S_m| > \varepsilon\right).$$

Comme la série $\sum P\left(|S_n| > \varepsilon\right)$ converge, son reste tend vers 0 et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{m=n}^{+\infty} P\left(|S_m| > \varepsilon\right) = 0$. Par le théorème des gendarmes, on obtient alors $\lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$ et ainsi :

$$\boxed{P\left(\bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n\right) = 0}$$

Q43. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \dfrac{1}{k}\right\}$.

Avec la question précédente et en posant $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$ et $B_n = B_n(k)$, on a :

$$\overline{B_n(k)} = \overline{\bigcup_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega \,;\, |S_m(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}} = \bigcap_{m \geq n} \left\{\omega \in \Omega \,;\, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\} = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Donc :

$$\Omega_k = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n(k)}.$$

Or, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(k) \in \mathcal{A}$, donc $\overline{B_n(k)} \in \mathcal{A}$ et $\Omega_k = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n(k)} \in \mathcal{A}$, soit :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \Omega_k \text{ est un événement.}}$$

On a $A = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$, et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left(\lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right) &\Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \varepsilon\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

Donc :

$$A = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall m \geq n,\ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\} = \left\{\omega \in \Omega \,;\, \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \Omega_k\right\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k .$$

Or, on vient de voir de que tous les Ω_k sont des évènements. Comme l'intersection d'une famille dénombrable d'évènements est un évènement :

$$\boxed{A \text{ est un évènement.}}$$

Q44. D'après les eux questions précédentes, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(k)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad P\left(\overline{\bigcap\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(k)}\right) = P\left(\bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n(k)}\right) = P(\Omega_k) = 1 .$$

Et, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_{k+1} \subset \Omega_k .$$

A nouveau par continuité décroissante, on obtient avec $P(\Omega_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\left(\bigcap\nolimits_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(\Omega_k) = 1 .$$

Avec $A = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$, on obtient finalement :

$$\boxed{P(A) = 1}$$