

Corrigé du DS n° 7

On note $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Pour $s \in \mathcal{L}_n$, $\sigma(s) = Sp(s)$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathcal{Q}_s(x) = \frac{(s(x), x)}{\|x\|^2}$.

Pour $T \in \mathcal{S}_n$, $m(T) = \min \sigma(T)$ et $M(T) = \max \sigma(T)$.

1. Fonctions d'endomorphismes symétriques

Q1. L'ensemble \mathcal{S}_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{L}_n , donc si $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n$:

$$T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$$

Q2. On a $m(T) \in \sigma(T)$, donc il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $T(x) = m(T)x$, alors :

$$\mathcal{Q}_T(x) = \frac{(T(x), x)}{\|x\|^2} = \frac{(m(T)x, x)}{\|x\|^2} = \frac{m(T)(x, x)}{\|x\|^2} = m(T) \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = m(T).$$

De la même façon, on prouve qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{Q}_T(x) = M(T)$, et donc :

$$\mathcal{Q}_T \text{ atteint les valeurs } m(T) \text{ et } M(T).$$

Q3. Comme l'endomorphisme T est symétrique réel, il est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres (e_1, e_2, \dots, e_n) que l'on peut choisir telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $T(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $m(T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M(T)$. On a alors pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$(T(x), x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i T(e_i), \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^n m(T) x_i^2 \leq (T(x), x) \leq \sum_{i=1}^n M(T) x_i^2 \iff m(T) \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq (T(x), x) \leq M(T) \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Soit :

$$m(T) \|x\|^2 \leq (T(x), x) \leq M(T) \|x\|^2.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$m(T) \leq \mathcal{Q}_T(x) \leq M(T).$$

Comme les valeurs $m(T)$ et $M(T)$ sont atteintes par \mathcal{Q}_T :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_T(x) = m(T) \text{ et } \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_T(x) = M(T).$$

Q4. On a $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$, donc :

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } \sigma(T) \subset \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow m(T) \geq 0 \text{ (resp. } m(T) > 0).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Q_T(x) = \frac{(T(x), x)}{\|x\|^2} \geq m(T)$, donc :

$$(T(x), x) \geq m(T)\|x\|^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned} m(T) \geq 0 \text{ (resp. } m(T) > 0) &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, m(T)\|x\|^2 \geq 0 \text{ (resp. } m(T)\|x\|^2 > 0) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (T(x), x) \geq 0 \text{ (resp. } (T(x), x) > 0) \\ &\Rightarrow T \in S_n^+ \text{ (resp. } T \in S_n^{+*}) \end{aligned}$$

Réciproquement, avec les notations de la question précédente, on a $(T(e_1), e_1) = m(T)$ et :

$$\begin{aligned} T \in S_n^+ \text{ (resp. } T \in S_n^{+*}) &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (T(x), x) \geq 0 \text{ (resp. } (T(x), x) > 0) \\ &\Rightarrow (T(e_1), e_1) = m(T) \geq 0 \text{ (resp. } (T(e_1), e_1) = m(T) > 0) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$m(T) \geq 0 \text{ (resp. } m(T) > 0) \Leftrightarrow T \in S_n^+ \text{ (resp. } T \in S_n^{+*}).$$

Et finalement, on a bien :

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } \sigma(T) \subset \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow T \in S_n^+ \text{ (resp. } T \in S_n^{+*})$$

Q5. On a $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\sigma(T) \subset I$, donc $[m(T), M(T)] \subset I$ (car I est un intervalle, donc convexe, qui contient $m(T)$ et $M(T)$) et on cherche $U \in S_n$ tel que pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ et tout $y \in \ker(T - \lambda I)$:

$$U(y) = f(\lambda)y.$$

Reprenons la base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ introduite plus haut (avec donc $T(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $m(T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M(T)$).

Définissons $U \in \mathcal{L}_n$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$U(e_i) = f(\lambda_i)e_i.$$

On a donc $M_{\mathcal{B}}(U) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$ et, si P est la matrice de passage de \mathcal{B}_c , la base canonique de \mathbb{R}^n à la base \mathcal{B} (toutes deux orthonormées pour le produit scalaire canonique), P est orthogonale et :

$$M_{\mathcal{B}_c}(U) = PM_{\mathcal{B}}(U)'P \in S_n(\mathbb{R}).$$

Ceci prouve que $U \in S_n$.

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $y \in \ker(T - \lambda_i I) = \text{Vect}(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_r})$ où $r = \dim \ker(T - \lambda_i I)$, on a $y = y_1 e_{k_1} + \dots + y_r e_{k_r}$ avec $y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}$ et :

$$U(y) = y_1 U(e_{k_1}) + \dots + y_r U(e_{k_r}) = y_1 f(\lambda_i) e_{k_1} + \dots + y_r f(\lambda_i) e_{k_r} = f(\lambda_i) (y_1 e_{k_1} + \dots + y_r e_{k_r}) = f(\lambda_i) y.$$

L'endomorphisme U ainsi défini est solution.

Réciproquement, si $U \in S_n$ est solution, alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $e_i \in \ker(T - \lambda_i I)$ donc $U(e_i) = f(\lambda_i)e_i$. Comme un endomorphisme de \mathbb{R}^n est parfaitement défini par l'image d'une base, ceci prouve que U est unique.

Finalement :

Il existe un unique $U \in S_n$ tel que pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ et tout $y \in \ker(T - \lambda I)$, $U(y) = f(\lambda)y$.

Q6. Posons $V = \sum_{j=0}^k \alpha_j T^j$.

Comme S_n est stable par produit, on a $T^j \in S_n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (même $T^0 = I \in S_n$).

Alors, comme S_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{L}_n , $V \in S_n$ quels que soient les réels α_j .

De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $T^j(e_i) = \lambda_i^j e_i$ donc :

$$V(e_i) = \sum_{j=0}^k \alpha_j T^j(e_i) = \sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda_i^j e_i = \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \lambda_i^j \right) e_i = p(\lambda_i) e_i.$$

Alors' d'après la question précédente, on a $V = p(T)$, par unicité de $p(T)$, soit :

$$p(T) = \sum_{j=0}^k \alpha_j T^j$$

Q7. Pour toute fonction $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, l'endomorphisme $f(T)$ est parfaitement défini par les $f(\lambda)$ pour $\lambda \in \sigma(T)$. Or, il existe une fonction polynômiale p telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p(\lambda_i) = f(\lambda_i)$:

$$p: x \mapsto \sum_{\lambda \in \sigma(T)} f(\lambda) \ell_\lambda(x)$$

avec, pour $\lambda \in \sigma(T)$, $\ell_\lambda: x \mapsto \frac{\prod_{\mu \in \sigma(T) \setminus \{\lambda\}} (x - \mu)}{\prod_{\mu \in \sigma(T) \setminus \{\lambda\}} (\lambda - \mu)}$.

On a alors $f(T) = p(T)$ et donc $f(T)$ est polynômiale en T (attention, f n'est pas forcément polynômiale).

Finalement :

Il n'existe pas de fonction $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(T)$ ne soit pas égal à un polynôme de T .

Q8. Avec toujours les même notations, on a vu que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U(e_i) = f(\lambda_i)e_i$ avec $U = f(T)$. Ceci prouve que $f(\lambda_i)$ est valeur propre de U et que tous les e_i sont vecteurs propres de U , donc que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de U .

Ceci prouve immédiatement que :

Les valeurs propres de $f(T)$ sont les $f(\lambda_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $\ker(U - f(\lambda_i)I) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(T) \\ f(\lambda) = f(\lambda_i)}} \ker(T - \lambda I)$.

Q9. On a vu dans la question 5 que pour toute fonction $h: J \rightarrow \mathbb{R}$:

$$M_{\mathcal{B}}(h(T)) = \text{diag}(h(\lambda_1), \dots, h(\lambda_n)).$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(f(T)) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$$

$$M_{\mathcal{B}}(g(T)) = \text{diag}(g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n))$$

$$M_{\mathcal{B}}((fg)(T)) = \text{diag}((fg)(\lambda_1), \dots, (fg)(\lambda_n)) = \text{diag}(f(\lambda_1)g(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)g(\lambda_n))$$

Alors :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(f(T) \circ g(T)) &= \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) \text{diag}(g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n)) \\ &= \text{diag}(f(\lambda_1)g(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)g(\lambda_n)) = M_{\mathcal{B}}((fg)(T)) \end{aligned}$$

Ainsi, $M_{\mathcal{B}}(f(T) \circ g(T)) = M_{\mathcal{B}}((fg)(T))$, donc :

$$f(T) \circ g(T) = (fg)(T)$$

Q10. D'après la question 4, si $S \in S_n^{+*}$, alors $\sigma(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $f(S)$ est bien définie. De plus, avec aucune valeur propre de S n'est égale à 0, donc $S \in GL_n(\mathbb{R})$ et ainsi, S^{-1} est bien définie.

Si $g = id_{\mathbb{R}_+^*}$, on a $g(S) = S$ car, toujours avec les notations de la question 3, $g(S)(e_i) = g(\lambda_i)e_i = \lambda_i e_i = S(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La fonction $fg : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est constante et vaut toujours 1, donc $(fg)(S) = id_{\mathbb{R}^n}$ car pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(fg)(S)(e_i) = (fg)(\lambda_i)e_i = e_i$.

Enfin, d'après la question précédente, on a $f(S) \circ g(S) = (fg)(S)$, soit :

$$f(S) \circ S = id_{\mathbb{R}^n}.$$

Ceci prouve que :

$$f(S) = S^{-1}$$

Q11. D'après la question 4, si $S \in S_n^+$, alors $\sigma(S) \subset \mathbb{R}_+$. Comme ici $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(S) \text{ est bien définie.}$$

Comme dans la question précédente, on peut écrire :

$$\sqrt{S}^2 = (f(S))^2 = f(S) \circ f(S) = (f^2)(S).$$

Or, $f^2 = id_{\mathbb{R}_+}$, donc $(f^2)(S) = S$ et ainsi :

$$\sqrt{S}^2 = S$$

Si toutes les valeurs propres de S sont simples, alors $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ et tous les sous-espaces propres sont des droites : $\ker(S - \lambda_i I) = \text{Vect}(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $C \in S_n^+$ telle que $C^2 = S$ (il y en a, ne serait-ce que \sqrt{S} dont les valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$ donc positives). Soit alors $\mu \in \mathbb{R}_+$ une valeur propre de C (qui est diagonalisable car symétrique réelle) et $x \neq 0$ un vecteur propre associé.

On a :

$$C(x) = \mu x \Rightarrow S(x) = C^2(x) = \mu^2 x.$$

Donc, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mu^2 = \lambda_i$ et $x \in \text{Vect}(e_i)$. Comme $\mu \geq 0$, on a :

$$\mu = \sqrt{\lambda_i} \text{ et } \ker(C - \mu I) \subset \text{Vect}(e_i).$$

Mais, $\dim \ker(C - \mu I) \geq 1$, donc $\ker(C - \mu I) = \text{Vect}(e_i)$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(C) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = M_{\mathcal{B}}(\sqrt{S}).$$

Et donc $C = \sqrt{S}$, ce qui permet de conclure :

$$\text{La seule matrice } C \text{ de } S_n^+ \text{ vérifiant } C^2 = S \text{ est } C = \sqrt{S}.$$

Si on reprend le même raisonnement que ci-dessus (avec les mêmes notations), mais avec seulement $C \in S_n$, alors on obtient :

$$\mu = \pm \sqrt{\lambda_i} \text{ et } \ker(C - \mu I) = \text{Vect}(e_i).$$

Et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de C . On a donc :

$$M_{\mathcal{B}}(C) = \text{diag}(\pm \sqrt{\lambda_1}, \dots, \pm \sqrt{\lambda_n}) = M_{\mathcal{B}}(\sqrt{S}).$$

Pour dénombrer le nombre d'endomorphismes correspondant, il faut distinguer deux cas, suivant que 0 est valeur propre de S ou pas (soit $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$) :

$$\text{Le nombre de matrices } C \text{ de } S_n \text{ vérifiant } C^2 = S \text{ est } 2^n \text{ quand } \lambda_1 \neq 0 \text{ et } 2^{n-1} \text{ quand } \lambda_1 = 0.$$

Q12. Soient $T_1, T_2, T_3 \in S_n$.

- On a $T_1 - T_1 = 0 \in S_n^+$, donc $T_1 \geq T_1$. La relation \geq est *réflexive*.
- Si $T_2 \geq T_1$ et $T_1 \geq T_2$, alors d'après la question 4 :

$$T_2 - T_1 \in S_n^+ \Rightarrow \sigma(T_2 - T_1) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}_+$$

$$T_1 - T_2 \in S_n^+ \Rightarrow \sigma(T_1 - T_2) = \sigma(-(T_2 - T_1)) = \{-\lambda_1, \dots, -\lambda_p\} \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}_-$$

Ainsi, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$, donc la seule valeur propre de $T_2 - T_1$ est 0, et comme $T_2 - T_1$ est diagonalisable, $T_2 - T_1 = 0$, soit $T_2 = T_1$. La relation \geq est *antisymétrique*.

- Si $T_2 \geq T_1$ et $T_3 \geq T_2$, on a $T_2 - T_1 \in S_n^+$ et $T_3 - T_2 \in S_n^+$. Alors, $T_3 - T_1 = (T_3 - T_2) + (T_2 - T_1) \in S_n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$((T_3 - T_1)(x), x) = ((T_3 - T_2)(x) + (T_2 - T_1)(x), x) = ((T_3 - T_2)(x), x) + ((T_2 - T_1)(x), x) \geq 0.$$

Donc, $T_3 - T_1 \in S_n^+$, soit $T_3 \geq T_1$. La relation \geq est *transitive*.

Finalement, la relation \geq est réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

Soient $T \in \mathcal{L}_n$, de matrice respectives $\begin{pmatrix} 2 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1} \end{pmatrix}$ dans la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^n .

Comme \mathcal{B}_c est orthonormée, on a $T \in S_n$. Or, $I \in S_n$ et :

$$M_{\mathcal{B}_c}(I-T) = \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $\sigma(I-T) = \sigma(T-I) = \{-1, 1\}$, donc n'est pas inclus dans \mathbb{R}_+ et, à nouveau d'après la question 4, on a $I-T \notin S_n^+$ et $T-I \notin S_n^+$. Ceci veut dire que l'on n'a ni $I \geq T$, ni $T \geq I$ et donc que T et I ne sont pas comparable par la relation \geq .

Finalement :

La relation \geq est une relation d'ordre, mais pas totale.

Q13. Soient $T_1, T_2, U \in S_n$ telles que $T_2 \geq T_1$. On a alors :

$$U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U = U \circ (T_2 - T_1) \circ U.$$

Et :

- Comme $T_1, T_2, U \in S_n$, on a :

$${}^t(U \circ (T_2 - T_1) \circ U) = {}^t U \circ {}^t (T_2 - T_1) \circ {}^t U = {}^t U \circ ({}^t T_2 - {}^t T_1) \circ {}^t U = U \circ (T_2 - T_1) \circ U.$$

Donc, $U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U \in S_n$.

- Comme $T_2 - T_1 \in S_n^+$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $((T_2 - T_1)(y), y) \geq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$(U \circ (T_2 - T_1) \circ U(x), x) = (U[(T_2 - T_1)(U(x))], x) = ((T_2 - T_1)(U(x)), U(x)) \geq 0.$$

Donc, $U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U \in S_n^+$.

Ainsi :

$$U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$$

Q14. Tel qu'indiqué, considérons $T_1, T_2 \in S_2$ tels que $M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}_c}(T_2) = M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec ici $n = 2$). Les deux matrices ci-dessus sont bien symétriques donc T_1 et T_2 sont bien symétriques.

De plus :

$$\chi_{T_1} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X(X-2) \Rightarrow \underline{\sigma(T_1) = \{0, 2\} \subset \mathbb{R}_+}.$$

$$\begin{aligned} \chi_{T_2} &= \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2) - 1 = X^2 - 3X + 1 = \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\ &\Rightarrow \underline{\sigma(T_2) = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\} \subset \mathbb{R}_+}. \end{aligned}$$

Et :

$$M_{\mathcal{B}_c}(T_2 - T_1) = M_{\mathcal{B}_c}(T_2) - M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(T_2 - T_1) = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}_+ \Rightarrow T_2 - T_1 \in S_n^+ \Rightarrow \underline{T_2 \geq T_1}.$$

Enfin, d'après la question 6, on a $f(T_1) = T_1^2$ et $f(T_2) = T_2^2$. Alors:

$$M_{\mathcal{B}_c}(f(T_2) - f(T_1)) = M_{\mathcal{B}_c}(T_2^2 - T_1^2) = (M_{\mathcal{B}_c}(T_2))^2 - (M_{\mathcal{B}_c}(T_1))^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\chi_{f(T_2)-f(T_1)} = \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 1 = \left(X - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) \left(X - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Comme $2 - \sqrt{5} < 0$, on a $\sigma(f(T_2) - f(T_1)) = \left\{ \frac{3-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right\} \not\subset \mathbb{R}_+$, donc $f(T_2) - f(T_1) \notin S_n^+$.

Ainsi, on a $T_2 \geq T_1$ mais pas $f(T_2) \geq f(T_1)$ et donc :

L'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto t^2$ ne définit pas un opérateur croissant.

Remarque : Pour généraliser à $n \geq 2$ quelconque, on peut considérer $T_1, T_2 \in S_n$ tels que :

$$M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}_c}(T_2) = \begin{pmatrix} M_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Q15. Soient $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$. Pour $i = 1$ ou 2 :

- $\sigma(T_i) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow 0 \notin \sigma(T_i) \Rightarrow T_i \in GL(\mathbb{R}^n)$;
- ${}^t(T_i^{-1}) = ({}^t T_i)^{-1} = T_i^{-1} \Rightarrow T_i^{-1} \in S_n$;
- $\sigma(T_i^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(T_i) \right\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

On a donc $T_i^{-1} \in S_n^{+*}$ et on note $T_i^{-1/2} = \sqrt{T_i^{-1}} \in S_n^{+*}$ telle que défini dans la question 11.

Avec $U = T_2^{-1/2}$, on a d'après la question 13 :

$$U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U.$$

Or, il existe une base orthonormée \mathcal{B} telle que $M_{\mathcal{B}}(T_2) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_k sont les valeurs propres de

T_2 (théorème spectral). Alors, $M_{\mathcal{B}}(U) = M_{\mathcal{B}}(T_2^{-1/2}) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ et :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(U \circ T_2 \circ U) &= M_{\mathcal{B}}(U) M_{\mathcal{B}}(T_2) M_{\mathcal{B}}(U) \\ &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \\ &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = I_n \end{aligned}$$

Donc, $U \circ T_2 \circ U = I$ et ainsi, $I \geq U \circ T_1 \circ U$, soit $I - U \circ T_1 \circ U \in S_n^+$, ce qui veut dire que toutes les valeurs propres de $U \circ T_1 \circ U$ sont inférieures à 1.

Remarquons que $T_1, U \in S_n^{+*}$ (donc U est bijective et $U^{-1}, T_1^{-1} \in S_n^{+*}$). On montre comme dans la question 13 que $U \circ T_1 \circ U \in S_n^+$ est comme, U et T_1 sont bijectives, $U \circ T_1 \circ U$ l'est aussi, donc 0 n'est pas valeur propre et ainsi $U \circ T_1 \circ U \in S_n^{+*}$. Ceci permet de conclure que $\sigma(U \circ T_1 \circ U) \subset \mathbb{R}_+^*$ et avec le résultat précédent :

$$\sigma(U \circ T_1 \circ U) \subset]0, 1]$$

Enfin, comme les valeurs propres de $(U \circ T_1 \circ U)^{-1}$ sont les inverses de celles de $U \circ T_1 \circ U$, on obtient :

$$\sigma(U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1}) = \sigma((U \circ T_1 \circ U)^{-1}) \subset [1, +\infty[.$$

Ceci prouve que $\sigma(U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} - I) \subset \mathbb{R}_+$, donc que $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} - I \in S_n^+$ et finalement :

$$U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I$$

On a $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$, et $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto -\frac{1}{t}$, donc $f(T_1) = -T_1^{-1}$ et $f(T_2) = -T_2^{-1}$.

On veut prouver que : $f(T_2) \geq f(T_1)$, soit $-T_2^{-1} \geq -T_1^{-1}$, ou encore $T_1^{-1} - T_2^{-1} \in S_n^+$.

On a $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \in S_n^{+*}$ et $I \in S_n^{+*}$, et on vient d'établir que :

$$U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I.$$

Or, $U \in S_n$, donc d'après la question 13 :

$$U \circ (U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1}) \circ U \geq U \circ I \circ U \Leftrightarrow T_1^{-1} \geq U^2 = \sqrt{T_2^{-1}{}^2} = T_2^{-1} \Leftrightarrow T_1^{-1} - T_2^{-1} \in S_n^+.$$

Ainsi, on a bien $f(T_2) \geq f(T_1)$, ce qui prouve que :

L'application $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto -\frac{1}{t}$ définit un opérateur croissant.

Q16. Soient $T_1, T_2 \in S_n^+$ tels que $T_2 \geq T_1$.

On a $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n^+$ donc $T_2^{1/2} - T_1^{1/2} \in S_n$ et $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a :

$$(T_2^{1/2} - T_1^{1/2})(x) = T_2^{1/2}(x) - T_1^{1/2}(x) = \lambda x.$$

Donc :

$$\begin{cases} T_2^{1/2}(x) = T_1^{1/2}(x) + \lambda x \\ T_1^{1/2}(x) = T_2^{1/2}(x) - \lambda x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2(x) = T_2^{1/2}T_2^{1/2}(x) = T_2^{1/2}T_1^{1/2}(x) + \lambda T_2^{1/2}(x) \\ T_1(x) = T_1^{1/2}T_1^{1/2}(x) = T_1^{1/2}T_2^{1/2}(x) - \lambda T_1^{1/2}(x) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} (T_2(x) - T_1(x), x) &= (T_2^{1/2}T_1^{1/2}(x) + \lambda T_2^{1/2}(x) - T_1^{1/2}T_2^{1/2}(x) + \lambda T_1^{1/2}(x), x) \\ &= (T_2^{1/2}T_1^{1/2}(x), x) + \lambda (T_2^{1/2}(x), x) - (T_1^{1/2}T_2^{1/2}(x), x) + \lambda (T_1^{1/2}(x), x) \\ &= (T_2^{1/2}T_1^{1/2}(x), x) - (T_1^{1/2}T_2^{1/2}(x), x) + \lambda [(T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x)] \end{aligned}$$

Et comme $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n$, on a :

$$(T_2^{1/2}T_1^{1/2}(x), x) - (T_1^{1/2}T_2^{1/2}(x), x) = (T_1^{1/2}(x), T_2^{1/2}(x)) - (T_2^{1/2}(x), T_1^{1/2}(x)) = 0.$$

Ainsi :

$$(T_2(x) - T_1(x), x) = \lambda \left[(T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x) \right].$$

Or, $T_2 \geq T_1$ donc $T_2 - T_1 \in S_n^+$ et $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n^+$, donc :

$$\left. \begin{array}{l} (T_2(x) - T_1(x), x) \geq 0 \\ (T_2^{1/2}(x), x) \geq 0 \\ (T_1^{1/2}(x), x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x) \geq 0$$

Alors :

- si $(T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x) = 0$, on a $(T_2^{1/2}(x), x) = (T_1^{1/2}(x), x) = 0$, donc $(T_2^{1/2} - T_1^{1/2})(x) = 0$ et $\lambda = 0$;
- si $(T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x) > 0$, on a $\lambda = \frac{(T_2(x) - T_1(x), x)}{(T_2^{1/2}(x), x) + (T_1^{1/2}(x), x)} \geq 0$.

Dans les deux cas $\lambda \geq 0$ et ainsi :

Les valeurs propres de $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ sont positives.

On a vu que $T_2^{1/2} - T_1^{1/2} \in S_n$ et ce qui précède prouve que $\sigma(T_2^{1/2} - T_1^{1/2}) \subset \mathbb{R}_+$, donc, d'après la question 4, on a $T_2^{1/2} - T_1^{1/2} \in S_n^+$, ce qui prouve que $T_2^{1/2} \geq T_1^{1/2}$ et ainsi :

L'application $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \sqrt{t}$ définit un opérateur croissant.

Q17. On a $u \in \mathbb{R}_+$ et $f_u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \frac{t}{t+u} = 1 - \frac{u}{t+u}$.

Soient $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $T_i + uI \in S_n^{+*} \subset GL(\mathbb{R}^n)$ (car $\sigma(T_i) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $\sigma(T_i + uI) = \{\lambda + u, \lambda \in \sigma(T_i)\} \subset \mathbb{R}_+^*$) et :

$$f_u(T_i) = I - u(T_i + uI)^{-1}.$$

Alors :

$$f_u(T_2) - f_u(T_1) = [I - u(T_2 + uI)^{-1}] - [I - u(T_1 + uI)^{-1}] = u[(T_1 + uI)^{-1} - (T_2 + uI)^{-1}].$$

Or, $T_1 + uI, T_2 + uI \in S_n^{+*}$ et $(T_2 + uI) - (T_1 + uI) = T_2 - T_1 \in S_n^+$ car $T_2 \geq T_1$, donc $T_2 + uI \geq T_1 + uI$ et d'après la question 15, on a $(T_1 + uI)^{-1} - (T_2 + uI)^{-1} \in S_n^+$. Comme $u \geq 0$, ceci donne :

$$f_u(T_2) - f_u(T_1) = u[(T_1 + uI)^{-1} - (T_2 + uI)^{-1}] \in S_n^+.$$

Et donc $f_u(T_2) \geq f_u(T_1)$, ce qui prouve que :

Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, l'application $f_u : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} ; t \mapsto \frac{t}{t+u}$ définit un opérateur croissant.

Q18. Soit \mathcal{B}' une autre base de \mathbb{R}^n et $P = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\Phi(s) = (\Phi_{i,j}(s))_{1 \leq i, j \leq n} = M_{\mathcal{B}}(\varphi(s)).$$

Posons $\Psi(s) = (\Psi_{i,j}(s))_{1 \leq i, j \leq n} = M_{\mathcal{B}'}(\varphi(s))$ et $P^{-1} = (\beta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. On a :

$$\Psi(s) = P^{-1}\Phi(s)P.$$

Soit, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\Psi_{i,j}(s) = \sum_{k=1}^n \left[\beta_{i,k} \sum_{\ell=1}^n \Phi_{k,\ell}(s) \alpha_{\ell,j} \right] = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \beta_{i,k} \alpha_{\ell,j} \Phi_{k,\ell}(s).$$

Ainsi, les $\Psi_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\Phi_{k,\ell}$, donc si les $\Phi_{k,\ell}$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* , les $\Psi_{i,j}$ le sont aussi et pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\int_0^{+\infty} \Psi_{i,j}(s) ds = \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \beta_{i,k} \alpha_{\ell,j} \int_0^{+\infty} \Phi_{k,\ell}(s) ds.$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \Psi(s) ds = P^{-1} \left(\int_0^{+\infty} \Phi(s) ds \right) P = P^{-1} \left[M_{\mathcal{B}} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds \right) \right] P = M_{\mathcal{B}'} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds \right).$$

Ainsi :

Les définitions de « φ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* » et de $\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds$ ne dépendent pas de \mathcal{B} .

Q19. On a $S \in S_n^{+*}$ et $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{L}_n; u \mapsto f_u(S)u^{a-1}$

L'endomorphisme S est symétrique réel, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ que l'on peut choisir telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S(e_i) = \lambda_i e_i$ où λ_i est la valeur propre associée à e_i (avec $\lambda_i > 0$ car $S \in S_n^{+*}$).

On a alors pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $M_{\mathcal{B}}(f_u(S)) = \text{diag}(f_u(\lambda_1), \dots, f_u(\lambda_n))$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi(u)) = M_{\mathcal{B}}(f_u(S)u^{a-1}) = \text{diag}(f_u(\lambda_1)u^{a-1}, \dots, f_u(\lambda_n)u^{a-1}) = \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + u}u^{a-1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_n + u}u^{a-1}\right).$$

D'après la question précédente, l'application φ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* si et seulement si pour tout

$i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la fonction $u \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_i + u}u^{a-1}$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Or, la fonction $u \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_i + u}u^{a-1}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* comme produit des deux fonctions continues

sur \mathbb{R}_+^* : $u \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_i + u}$, qui est rationnelle et définie sur \mathbb{R}_+^* (car $\lambda_i > 0$) et $u \mapsto u^{a-1}$ qui est une fonction

puissance (réelle). De plus, comme $a \in]0, 1[$:

- $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + u}u^{a-1} \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u^{a-1}$ et $\int_0 u^{a-1} du$ converge car $a-1 > -1$;

- $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + u} u^{a-1} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_i u^{a-2}$ et $\int^{+\infty} \lambda_i u^{a-2} du$ converge car $a-2 < -1$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + u} u^{a-1} du$ converge, et comme $u \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_i + u} u^{a-1}$ est positive sur \mathbb{R}_+^* , elle est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Finalement, tous les coefficients de $M_B(\varphi(u))$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* , donc :

L'application φ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Q20. On a $\int_0^{+\infty} \varphi(u) du = \int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1} du$ et :

$$M_B \left(\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right) = M_B \left(\int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1} du \right) = \text{diag} \left(\int_0^{+\infty} f_u(\lambda_1) u^{a-1} du, \dots, \int_0^{+\infty} f_u(\lambda_n) u^{a-1} du \right).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\lambda_i) u^{a-1} du$, donc :

$$\begin{aligned} M_B \left(\frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1} du \right) &= \text{diag} \left(\frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\lambda_1) u^{a-1} du, \dots, \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\lambda_n) u^{a-1} du \right) \\ &= \text{diag}(\lambda_1^a, \dots, \lambda_n^a) \\ &= M_B(S^a) \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1} du = S^a$$

Q21. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n , une application $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{L}_n$ continue et intégrable sur \mathbb{R}_+^* et $u \in \mathbb{R}_+^*$. Si on note $M_B(\varphi(u)) = \Phi(u) = (\Phi_{i,j}(u))_{i,j}$, alors pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\varphi(u)(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{i,j}(u) \right) e_i \quad \text{et} \quad \left(\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right)(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \int_0^{+\infty} \Phi_{i,j}(u) du \right) e_i.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left(\left(\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right)(x), x \right) &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \int_0^{+\infty} \Phi_{i,j}(u) du \right) e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \sum_{j=1}^n x_j \int_0^{+\infty} \Phi_{i,j}(u) du \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \int_0^{+\infty} \Phi_{i,j}(u) du \right) \end{aligned}$$

Et comme les $\Phi_{k,\ell}$ sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+^* , les $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \Phi_{i,j}$ le sont, donc :

$$\begin{aligned} \left(\left(\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right)(x), x \right) &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \Phi_{i,j}(u) \right) du = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n x_j \Phi_{i,j}(u) \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_j \Phi_{i,j}(u) \right) e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) du \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\left(\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right) (x), x \right) = \int_0^{+\infty} (\varphi(u)(x), x) du.$$

Soient alors $T_1, T_2 \in S_n^{**}$ tels que $T_2 \geq T_1$.

On veut montrer que $T_2^a \geq T_1^a$, autrement dit que $T_2^a - T_1^a \in S_n^+$.

On a déjà $T_2^a, T_1^a \in S_n^+$ donc $T_2^a - T_1^a \in S_n$ et :

$$T_2^a - T_1^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} f_u(T_2) du - \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} f_u(T_1) du = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} [f_u(T_2) - f_u(T_1)] du.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left((T_2^a - T_1^a)(x), x \right) &= \left(\left(\frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} [f_u(T_2) - f_u(T_1)] du \right) (x), x \right) \\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} ([f_u(T_2) - f_u(T_1)](x), x) du \end{aligned}$$

Or, d'après la question 17, l'application f_u définit un opérateur croissant pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, autrement dit, $f_u(T_2) - f_u(T_1) \in S_n^+$ et $([f_u(T_2) - f_u(T_1)](x), x) \geq 0$. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $u^{a-1} ([f_u(T_2) - f_u(T_1)](x), x) \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} u^{a-1} ([f_u(T_2) - f_u(T_1)](x), x) du \geq 0.$$

Enfin, comme $a \in]0, 1[$, $a\pi \in]0, \pi[$, donc $\frac{\sin a\pi}{\pi} > 0$ et ainsi :

$$\left((T_2^a - T_1^a)(x), x \right) = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} u^{a-1} ([f_u(T_2) - f_u(T_1)](x), x) du \geq 0.$$

Finalement, $T_2^a - T_1^a \in S_n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left((T_2^a - T_1^a)(x), x \right) \geq 0$, ce qui prouve que $T_2^a - T_1^a \in S_n^+$, donc que $T_2^a \geq T_1^a$ quand $T_2 \geq T_1$ et ainsi :

Pour tout $a \in]0, 1[$, la fonction $\varphi_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto t^a$ définit un opérateur croissant.