Corrigés des TD complémentaires du chapitre 19

Exercice 1

a) On a :

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0 .$$

Sur $\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$, *f* est rationnelle donc de classe C^1.

Le problème est donc en $(0,0)$. Si, pour $(x,y) \neq (0,0)$, on passe en cordonnées polaires, on a :

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\right| = \left|\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)}\right| = r\left|\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right|.$$

Or, $1+\cos\theta\sin\theta = 1+\frac{1}{2}\sin 2\theta \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ donc :

$$\left|\frac{\cos^3\theta+\sin^3\theta}{1+\cos\theta\sin\theta}\right| \leq 2\left|\cos^3\theta+\sin^3\theta\right| \leq 4 .$$

Ainsi, $|f(x,y)| \leq r$. Alors, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, donc *f* est continue en $(0,0)$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+xy+y^2)-(x^3+y^3)(2x+y)}{(x^2+xy+y^2)^2} = \frac{x^4+2x^3y+3x^2y^2-2xy^3-y^4}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{1}{3}$ donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) \neq \lim_{x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,x).$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0 et finalement :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}.}$$

b) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+y^2 \geq 0$ et $1+\sqrt{x^2+y^2} > 0$ donc *f* est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions ln et racine étant continues respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+$, *f* est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Les fonctions ln et racine carrée sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $x^2+y^2>0$ si et seulement si $(x,y)\neq(0,0)$, donc *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(1+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

Alors :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x} = 1$;

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1+x\sqrt{2})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ et de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.}$$

Exercice 2

Notons $\Delta = \{(x,x),\, x \in \mathbb{R}\}$ la première bissectrice.

La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que quotient de telles fonctions.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 :

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \int_x^y (y-t) f''(t)dt .$$

Ceci donne quand $x \neq y$:

$$g(x,y) = f'(x) + \frac{1}{y-x}\int_x^y (y-t) f''(t)dt .$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Si $(x,y) \to (a,a)$, alors $x \to a$ et $y \to a$, et comme f' est continue en a, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f'(x) = \lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) = g(a,a) .$$

Comme f'' est continue, elle est bornée la boule $B(a,r)$ est si $M = \sup\limits_{B(a,r)} |f''|$, on a pour tout $(x,y) \in B(a,r)$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{1}{y-x}\int_x^y (y-t) f''(t)dt \right| \leq \frac{1}{|y-x|}\left| \int_x^y |y-t||f''(t)|dt \right| \leq \frac{1}{|y-x|}\left| \int_x^y |y-t| M\, dt \right| = M\,\frac{1}{|y-x|}\frac{1}{2}(y-x)^2 = \frac{M}{2}|y-x| .$$

Or, quand $(x,y) \to (a,a)$, $y - x \to 0$, donc le théorème des gendarmes donne :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ x\neq y}} \frac{1}{y-x}\int_x^y (y-t) f''(t)dt = 0 .$$

Ainsi :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ x\neq y}} g(x,y) = g(a,a) .$$

Or, à nouveau par continuité de f' en a :

$$\lim_{(x,x)\to(a,a)} g(x,x) = \lim_{(x,x)\to(a,a)} f'(x) = \lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) = g(a,a) .$$

Finalement, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,a)} g(x,y) = g(a,a)$, donc :

$$g \text{ est continue en } (a,a) \text{ quel que soit } a \in \mathbb{R} .$$

Par ailleurs, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{f'(x)(x-y) - \big(f(x) - f(y)\big)}{(x-y)^2} = \frac{f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)}{(x-y)^2} .$$

Avec la formule de Taylor avec reste intégral vue plus haut on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)f''(t)dt \\ &= \frac{1}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)\left(f''(t)-f''(a)+f''(a)\right)dt \\ &= \frac{1}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt + \frac{f''(a)}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)dt \\ &= \frac{1}{(x-y)^2}\int_x^y (y-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt + \frac{1}{2}f''(a)\end{aligned}$$

Alors :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{1}{2}f''(a)\right| = \frac{1}{(x-y)^2}\left|\int_x^y (y-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt\right| \leq \frac{1}{(x-y)^2}\left|\int_x^y |y-t|\left|f''(t)-f''(a)\right|dt\right|.$$

Soit un réel $\varepsilon>0$. Comme f'' est continue en a, il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $t\in[a-\alpha,a+\alpha]$:

$$|f''(t)-f''(a)|\leq\varepsilon.$$

Prenons $(x,y)\in B(a,\alpha)$ tel que $x\neq y$. On a $|x-a|\leq\alpha$ et $|y-a|\leq\alpha$, donc $[x,y]$ *ou* $[y,x]\subset[a-\alpha,a+\alpha]$ et ainsi :

$$\left|\int_x^y |y-t|\left|f''(t)-f''(a)\right|dt\right| \leq \left|\int_x^y |y-t|dt\right| = \frac{1}{2}(x-y)^2\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $(x,y)\in B(a,\alpha)$ tel que $x\neq y$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\frac{1}{2}f''(a)\right|\leq\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x\neq y}}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}f''(a).$$

Ainsi, avec pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\frac{1}{2}f''(a)$.

La continuité de f'' permet d'affirmer que :

$$\lim_{(x,x)\to(a,a)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}f''(a)=\frac{\partial g}{\partial x}(a,a).$$

Donc, $\lim_{(x,y)\to(a,a)}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}f''(a)$ et ainsi, $\frac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur Δ. Il en va de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$ (car x et y sont interchangeables dans la formule de $g(x,y)$).

Finalement, g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ et sur Δ, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$