Corrigés des TD du chapitre 2

Exercice 1

1) On a $\dfrac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq a$, soit $\|y-x\| \leq a\|x\|$. En écrivant $x = x - y + y$, on obtient :

$$\|y-x\| \leq a\|x-y+y\| \leq a\|x-y\| + a\|y\| \quad \Rightarrow \quad (1-a)\|y-x\| \leq a\|y\| .$$

Et comme $a \in [0,1[$, on a $1-a > 0$, donc, avec aussi $\|y\| > 0$:

$$\boxed{\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}}$$

2) Remarquons que dans la formule désirée, x et y jouent le même rôle, donc quitte à intervertir les deux vecteurs, on peut supposer que $0 < \|x\| \leq \|y\|$ (donc $\max\left(\|x\|,\|y\|\right) = \|y\|$).

Posons alors $k = \dfrac{\|x\|}{\|y\|}$ (on a donc $0 < k \leq 1$), $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $v = \dfrac{y}{\|y\|}$ (on a donc $\|u\| = \|v\| = 1$).

Le résultat voulu se récrit alors : $\|u-v\| \leq 2\dfrac{\|x-y\|}{\|y\|} = 2\|ku-v\|$. On a :

$$\|u-v\| = \|u-ku+ku-v\| \leq \|u-ku\| + \|ku-v\| = \|(1-k)u\| + \|ku-v\| .$$

Et comme $\|u\| = 1$ et $1-k \geq 0$, on a :

$$\|u-v\| \leq 1-k+\|ku-v\| .$$

Enfin, d'après l' « autre » inégalité triangulaire : $\big|\,\|ku\| - \|v\|\,\big| \leq \|ku-v\|$. Avec $\|u\| = \|v\| = 1$, on obtient :

$$1-k = |k-1| \leq \|ku-v\| .$$

Finalement, on obtient :

$$\|u-v\| \leq 1-k+\|ku-v\| \leq 2\|ku-v\| .$$

Soit :

$$\boxed{\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\max\left(\|x\|,\|y\|\right)}}$$

Exercice 2

Les preuves que N_1, N_∞ et N sont des normes sur E se font exactement comme celles faites dans le cours pour les deux premières normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$ (le fait que le nombre $n+1$ de composantes varie ne change pas la preuve) et pour la norme infinie sur $C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ avec $[a,b] = [0,1]$ (en remarquant que les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ et que si un polynôme s'annule en tout point de $[0,1]$, alors il admet une infinité de racines, donc il est nul).

Soit $P = X^n + ... + X + 1$. On a $N_\infty(P) = 1$ et $N_1(P) = N(P) = n+1$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_1(P)}{N_\infty(P)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{N(P)}{N_\infty(P)} = +\infty .$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \leq aN_\infty$ ou $N \leq aN_\infty$, et donc :

N_∞ n'est équivalente ni à N_∞, ni à N .

Soit maintenant $P = (1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k$. On a $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $N(P) = 1$. Alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{N_1(P)}{N(P)} = +\infty .$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \leq aN$:

N_1 et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 3

On a vu dans le cours que si *u* est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans *E*, alors $x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$ et dans la preuve, l'aspect bijectif n'est utilisé que pour prouver la séparation.

On prouve donc exactement comme dans le cours que $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une application de *F* dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. De plus, pour tout $x \in F$, on a :

$$N(x) = 0 \iff \|u(x)\| = 0 \iff u(x) = 0 .$$

Et pour que $u(x) = 0$ soit équivalent à $x = 0$, il est nécessaire et suffisant que *u* soit injective.

Ainsi :

L'application $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur *F* si et seulement si *u* est injective.

Exercice 4

On a $\lim_{t \to +\infty} (e^t - t - 2) = +\infty$, donc pour tout réel *k* assez grand, $e^k - k - 2$ est positif. La fonction constante $f : [0,1] \to \mathbb{R} ; x \mapsto k$ appartient alors à *A* et a pour norme $\|f\|_\infty = k$.

Ainsi, on peut trouver $f \in A$ de norme aussi grande que l'on veut, ce qui veut dire que :

A n'est pas bornée.

Soit maintenant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de *A* convergeant vers $f \in E$. On a donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty .$$

Donc, pour $x \in [0,1]$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in A$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $2 + f_n(x) \leq e^{f_n(x)}$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient pour tout $x \in [0,1]$: $2 + f(x) \leq e^{f(x)}$ et ainsi, $f \in A$.

Ceci prouve que :

A est fermée.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est une partie fermée et non bornée de } E.}$$

Exercice 5

1) On a $A \subset \overline{A}$ donc $E \backslash \overline{A} \subset E \backslash A$ et, comme, $\overline{A}$ est fermé, $E \backslash \overline{A}$ est un ouvert inclus dans $E \backslash A$.

Soit un ouvert O inclus dans $E \backslash A$. On a $O \subset E \backslash A$, donc : $E \backslash (E \backslash A) = A \subset E \backslash O$.

Or, $E \backslash O$ est fermé, c'est donc un fermé contenant A. Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset E \backslash O$ et donc : $O \subset E \backslash \overline{A}$. Ainsi, tout ouvert O inclus dans $E \backslash A$ est inclus dans $E \backslash \overline{A}$.

Finalement, $E \backslash \overline{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $E \backslash A$, soit :

$$\boxed{E \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \backslash A}}}$$

Si on remplace A par $E \backslash A$ dans la relation ci-dessus, on obtient : $E \backslash \overline{E \backslash A} = \overset{\circ}{\widehat{E \backslash (E \backslash A)}} = \overset{\circ}{A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\overline{E \backslash A} = E \backslash \overset{\circ}{A}}$$

2) Pour tout $a \in \overline{A}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a. Or, les éléments de A sont dans B, donc il existe une suite d'éléments de B qui converge vers a. Ceci prouve que $a \in \overline{B}$ et ainsi :

$$\boxed{\overline{A} \subset \overline{B}}$$

Si $A \subset B$, alors $E \backslash B \subset E \backslash A$, et d'après ce qui précède : $\overline{E \backslash B} \subset \overline{E \backslash A}$.

D'après la question précédente : $E \backslash \overset{\circ}{B} \subset E \backslash \overset{\circ}{A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\boxed{\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}}$$

3) On a $A \cap B \subset A$, donc d'après le résultat ci-dessus : $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$. De même, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B}$ et donc :

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Soit maintenant $a \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Il existe alors $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a, r_1) \subset A$ et $B(a, r_2) \subset B$.

En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, on a $B(a,r) \subset B(a, r_1) \subset A$ et $B(a,r) \subset B(a, r_2) \subset B$, donc $B(a,r) \subset A \cap B$.

Ceci prouve que $a \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ et ceci étant vrai pour tout $a \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, on a :

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}.$$

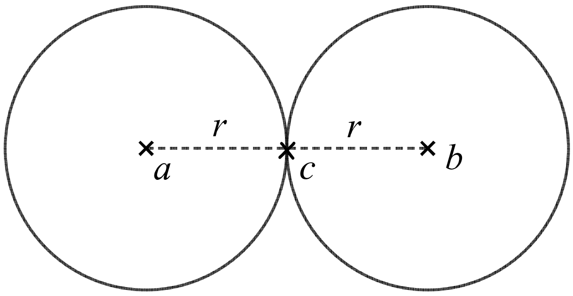
Finalement, on bien :

$$\boxed{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}}$$

4) On a $A \cap B \subset A$, donc d'après la question 2 : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. De même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ et ainsi :

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Soit $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Posons $r = \dfrac{\|a-b\|}{2}$, $A = B(a,r)$ et $B = B(b,r)$.



On a $A \cap B = \varnothing$ (si $x \in A \cap B$, on a $2r = \|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < r+r = 2r$: absurde), donc $\overline{A \cap B} = \varnothing$, mais $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B}(a,r) \cap \overline{B}(b,r) = \{c\}$ avec $c = \dfrac{1}{2}(a+b)$, donc :

$$\boxed{\text{L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.}}$$

Exercice 6

Soient a et b deux éléments de $\overline{C}$ et un réel $\lambda \in [0,1]$.

Il existe deux suites de C, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a et b respectivement.

Comme C est convexe, $\lambda a_n + (1-\lambda) b_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lambda a_n + (1-\lambda) b_n\right) = \lambda a + (1-\lambda) b \in \overline{C}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\overline{C} \text{ est convexe.}}$$

Soient a et b deux éléments de $\overset{\circ}{C}$ (donc de C aussi).

Comme a et b sont intérieurs à C, il existe deux réels $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(a, r_1) \subset C$ et $B(b, r_2) \subset C$.

En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, on a $B(a,r) \subset B(a,r_1) \subset C$ et $B(b,r) \subset B(b,r_2) \subset C$.

Soit maintenant $t\in[0,1]$ et $c=ta+(1-t)b$. Posons :

$$A=\{tx+(1-t)y,\ (x,y)\in B(a,r)\times B(b,r)\}.$$

Pour tout $(x,y)\in B(a,r)\times B(b,r)$, on a $(x,y)\in C^2$, donc $tx+(1-t)y\in C$ (car C est convexe). Ainsi :

$$\underline{A\subset C}.$$

Prouvons que $A=B(c,r)$.

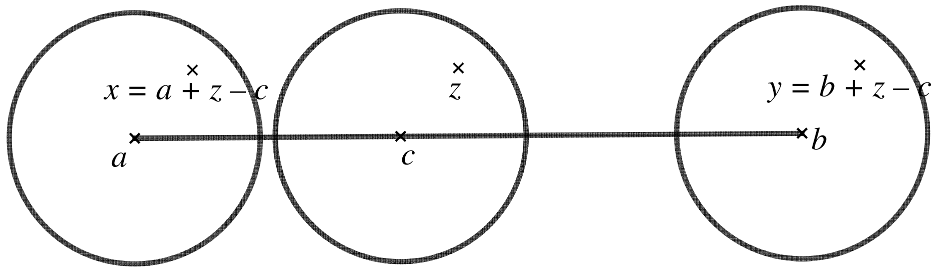
Soit $(x,y)\in B(a,r)\times B(b,r)$. On a $\|x-a\|<r$, $\|y-b\|<r$ et :

$$\|tx+(1-t)y-c\|=\|t(x-a)+(1-t)(y-b)\|\le t\|x-a\|+(1-t)\|y-b\|<tr+(1-t)r=r.$$

Donc, $tx+(1-t)y\in B(c,r)$ et ainsi : $\underline{A\subset B(c,r)}$.

Soit maintenant $z\in B(c,r)$.

On considère les vecteurs $x=a+z-c$ et $y=b+z-c$ comme sur le schéma ci-dessous :



On a :

$$\left.\begin{array}{l}\|x-a\|=\|a+z-c-a\|=\|z-c\|<r \quad\Rightarrow\quad x\in B(a,r)\\ \|y-b\|=\|b+z-c-b\|=\|z-c\|<r \quad\Rightarrow\quad y\in B(b,r)\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad tx+(1-t)y\in A.$$

Or :

$$tx+(1-t)y=t(a+z-c)+(1-t)(b+z-c)=ta+(1-t)b+t(z-c)+(1-t)(z-c)=c+z-c=z.$$

Donc, $z\in A$ et ainsi : $\underline{B(c,r)\subset A}$.

Finalement, on a bien :

$$\underline{A=B(c,r)}.$$

En résumé, on vient de prouver que pour tout $t\in[0,1]$, il existe un réel $r>0$ tel que $B\big(ta+(1-t)b,r\big)\subset C$, autrement dit, pour tout $t\in[0,1]$, $ta+(1-t)b\in\overset{\circ}{C}$.

Donc, pour tous $a,b\in\overset{\circ}{C}$, $[a,b]\subset\overset{\circ}{C}$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\overset{\circ}{C}\text{ est convexe.}}$$

Exercice 7

1) Comme on a bien lu l'énoncé jusqu'au bout, on a repéré la question 7.a. que l'on résout maintenant.

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$.

Si on pose $AB=(c_{i,j})$, on a $\|AB\|_\infty=\max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}|c_{i,j}|$ et pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$:

$$|c_{i,j}|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right|\le\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}||b_{k,j}|\le\sum_{k=1}^{n}\|A\|_\infty.\|B\|_\infty=n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty.$$

Donc :

$$\|AB\|_\infty\le n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty.$$

Si on pose maintenant pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|=n.\|A\|_\infty$, $A\mapsto\|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $A\mapsto\|A\|_\infty$ en est une et $n>0$. On a de plus, pour tout $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|AB\|=n.\|AB\|_\infty\le n\left(n.\|A\|_\infty.\|B\|_\infty\right)=\left(n.\|A\|_\infty\right)\left(n.\|B\|_\infty\right)=\|A\|.\|B\|.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien une norme } \|.\| \text{ de } E \text{ telle que pour toutes } A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|AB\|\le\|A\|.\|B\|.}$$

2) Soit $A\in E$. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\|A^k\|\le\|A\|^k$.

Or, si $\|A\|<1$, on a $\|A\|^k\to0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\|A^k\|\to0$ et ainsi :

$$\boxed{\|A\|<1\ \Rightarrow\ A^k\to0_n}$$

Posons $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$ et $B=\begin{pmatrix}0&2\\1/4&0\end{pmatrix}$.

On a $\|A\|_\infty=\|B\|_\infty=2$, donc $\|A\|=\|B\|=4$ et :

- pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^k=2^kI_2$ donc $\|A^k\|\to+\infty$ et la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ;
- $B^2=\dfrac{1}{2}I_2$ donc, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $B^{2k}=\dfrac{1}{2^k}I_2$ et $B^{2k+1}=\dfrac{1}{2^k}B$. On a alors $\|B^k\|\to0$, donc $B^k\to0_n$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|A\|\ge1, \text{ on ne peut pas conclure quant à la limite de } (A^k)_{k\in\mathbb{N}}.}$$

3) $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc :

$$\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont fermés dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soit $A\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'une part, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est fermé donc :

$$M\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, ${}^t(A^2)=({}^tA)^2=(-A)^2=A^2$, donc $A^2\in S_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^{2k}\in S_n(\mathbb{R})$ et $A^{2k}\to M$, donc, comme $S_n(\mathbb{R})$ est fermé :

$$M\in S_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $M\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\cap S_n(\mathbb{R})=\{0_n\}$, soit $M=0_n$ et finalement :

$$\boxed{\text{Si } A\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\text{, la seule limite possible de la suite } (A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est } 0_n.}$$

4) On a $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})=\left\{A=(a_{i,j})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}>0\right\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}_n(\mathbb{R})=\left\{A=(a_{i,j})\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j}\le 0\right\}.$$

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k=(a_{k,i,j})$ et $A=(a_{i,j})$. On a :

$$A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A \iff \forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ a_{k,i,j}\xrightarrow[k\to+\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme les matrices A_k possèdent toutes n^2 coefficients, il existe $(i_0,j_0)\in [\![1,n]\!]^2$ et une suite extraite $(A_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $a_{\varphi(k),i_0,j_0}\le 0$ et :

$$a_{i_0,j_0}=\lim_{k\to+\infty} a_{k,i_0,j_0}=\lim_{k\to+\infty} a_{\varphi(k),i_0,j_0}\le 0.$$

Ainsi, il existe $(i_0,j_0)\in [\![1,n]\!]^2$ tel que $a_{i_0,j_0}\le 0$ et donc $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Ceci prouve que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est fermé, donc que :

$$\boxed{\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } E.}$$

5) La trace est une forme linéaire sur *E*, donc l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un hyperplan de *E*. Ainsi, c'est un sous-espace de *E*, donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices de trace nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé, d'intérieur vide.}}$$

6) En remplaçant $a_{i,j}\le 0$ par $0\le a_{i,j}\le 1$, on démontre exactement comme dans la question 4 que $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de *E*.

De plus, pour tout $A=(a_{i,j})\in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty$ est l'un des coefficients de *A*, donc $\|A\|_\infty\in[0,1]$ et ainsi, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de *E*.

Enfin, soient $A,B\in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ avec $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$, et $\lambda\in[0,1]$.

On a $\lambda \geq 0$ et $1-\lambda \geq 0$, donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{cases} 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ 0 \leq b_{i,j} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda \\ 0 \leq (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1-\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \leq \lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j} \leq 1.$$

Les $\lambda a_{i,j} + (1-\lambda) b_{i,j}$ étant les coefficients de $\lambda A + (1-\lambda) B$, on a $\lambda A + (1-\lambda) B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et donc, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de *E*.

Finalement :

$$\boxed{\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ est une partie convexe, fermée et bornée de } E.}$$

7) a. On l'a fait plus haut.

b. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|_\infty \leq n^{k-1}.\|A\|_\infty^k$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{k,i,j})$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\forall\, k \in [\![1,p]\!],\ |a_{k,i,j}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^{k-1}.\|A\|_\infty^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} |a_{k,i,j}| \leq |a_{0,i,j}| + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} n^{k-1}.\|A\|_\infty^k .$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} n^{k-1}.\|A\|_\infty^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{\left(n.\|A\|_\infty\right)^k}{k!}$ et la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{\left(n.\|A\|_\infty\right)^k}{k!}$ converge. La série $\displaystyle\sum \frac{1}{k!} a_{k,i,j}$ est alors absolument convergente, donc convergente.

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ et toutes les suites $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent :

$$\boxed{\text{La suite } (A_p)_{p \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

c. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A = aI_2 + N$, avec $N^2 = 0_2$ donc $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

Comme I_2 et *N* commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, soit pour tout entier $p \geq 2$:

$$A^p = (aI_2 + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (aI_2)^{p-k} N^k = \binom{p}{0} (aI_2)^p + \binom{p}{1} (aI_2)^{p-1} N = a^p I_2 + p a^{p-1} N .$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $p = 0$ (en prenant ici $a^0 = 1$ même quand $a = 0$) et $p = 1$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} (a^k I_2 + k a^{k-1} N) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} a^k I_2 + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} k a^{k-1} N \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right) N = \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!} \right) N \end{aligned}$$

Et donc :

$$\exp(A)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\right)I_2+\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}\right)N=e^a(I_2+N).$$

Soit :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\exp(A)=\begin{pmatrix}e^a&e^a\\0&e^a\end{pmatrix}}$$

Soit $A=diag(a_1,\dots,a_n)$ avec $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $p\in\mathbb{N}$, $A^p=diag(a_1^p,\dots,a_n^p)$ et :

$$A_p=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}diag(a_1^k,\dots,a_n^k)=diag\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{a_1^k}{k!},\dots,\sum_{k=0}^{p}\frac{a_n^k}{k!}\right).$$

Donc :

$$\exp(A)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}A^k=diag\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_1^k}{k!},\dots,\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_n^k}{k!}\right).$$

Soit :

$$\boxed{A=diag(a_1,\dots,a_n)\quad\Rightarrow\quad\exp(A)=diag(e^{a_1},\dots,e^{a_n})}$$

Exercice 8

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\left(u_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$u_k^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{1}{k+1} & \text{si } k\le n\\ 0 & \text{si } k>n\end{cases}\quad\text{et}\quad u_k=\frac{1}{k+1}\ \text{pour tout } k\in\mathbb{N}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u^{(n)}\in F$ et :

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\ \left|u_k^{(n)}-u_k\right|=\begin{cases}0 & \text{si } k\le n\\ \dfrac{1}{k+1} & \text{si } k>n\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\left\|u^{(n)}-u\right\|_\infty=\frac{1}{n+2}.$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|u^{(n)}-u\right\|_\infty=0$, donc $u^{(n)}\to u$. Comme $u\notin F$, on en conclut que :

$$\boxed{F\text{ n'est pas fermé.}}$$

Comme F est l'ensemble des suites des suites réelles bornées nulles à partir d'un certain rang, $E\setminus F$ est l'ensemble des suites des suites réelles bornées possédant un terme non nul de rang plus grand que tout entier aussi grand que l'on veut : $\forall\, u\in E\setminus F,\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ N\ge n,\ u_N\neq 0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\left(v_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_k^{(n)}=\dfrac{1}{(n+1)(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v^{(n)}\in E\setminus F$ ($v^{(n)}$ est bornée et ne possède aucun terme nul) et $\left\|v^{(n)}\right\|_\infty=\dfrac{1}{n+1}$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty}\left\|v^{(n)}\right\|_\infty=0$, ce qui prouve que la suite (de suites) $\left(v^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle, qui appartient à *F*, donc pas à $E\setminus F$. Ainsi, $E\setminus F$ n'est pas fermé, donc :

$$\boxed{F \text{ n'est pas ouvert.}}$$

Exercice 9

1) Soit $f\in E$ telle que $N_\infty(f)=1$. Alors, pour tout $t\in[0,1]$, on a $-1\le f(t)\le 1$ (et 1 ou – 1 est atteint car ici *f* est continue sur un segment, donc $|f|$ aussi et $N_\infty(f)=\sup_{[0,1]}|f|=\max_{[0,1]}|f|$).

Ainsi, pour tout $f\in A$:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}\le\displaystyle\int_0^{1/2}f(t)dt\le\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\le\displaystyle\int_{1/2}^{1}f(t)dt\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\le\int_0^{1/2}f(t)dt-\int_{1/2}^1 f(t)dt\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ -1\le\varphi(f)\le 1\ \Rightarrow\ |\varphi(f)|\le 1\,.$$

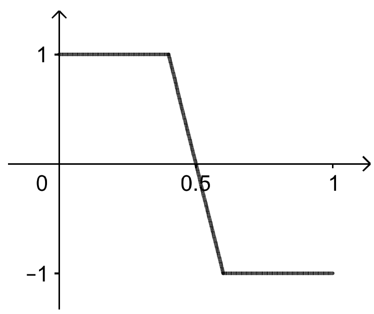
Ainsi, $\sup_{f\in A}|\varphi(f)|$ existe :

$$\sup_{f\in A}|\varphi(f)|\le 1\,.$$

Remarquons que pour $f\in E$, $\varphi(f)$ est d'autant plus grand que $\int_0^{1/2}f(t)dt$ est grand et positif et $\int_{1/2}^1 f(t)dt$ est grand et négatif. Ceci nous incite à considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n(t)=\begin{cases}1 & \text{pour } t\in\left[0,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}\right]\\ -2nt+n & \text{pour } t\in\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right]\\ -1 & \text{pour } t\in\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n},1\right]\end{cases}$$

La figure ci-dessous représente f_5 :



On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n\in A$ et :

$$\varphi(f_n)=\int_0^{1/2}f_n(t)dt-\int_{1/2}^1 f_n(t)dt=\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}f_n(t)dt+\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}}f_n(t)dt-\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}f_n(t)dt-\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^{1}f_n(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}+\left[-nt^2+nt\right]_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}}-\left[-nt^2+nt\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2n}$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}|\varphi(f_n)|=1$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\sup_{f\in A}|\varphi(f)|=1}$$

Supposons qu'il existe $f\in A$ telle que $|\varphi(f)|=1$.

En remarquant que $-f\in A$ et $\varphi(-f)=-\varphi(f)$, on peut supposer (quitte à changer f en $-f$) que $\varphi(f)=1$.

On a vu que :

$$\left.\begin{array}{r}\int_0^{1/2} f(t)dt\le\dfrac{1}{2}\\ -\int_{1/2}^1 f(t)dt\le\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\varphi(f)\le 1.$$

Et, si l'une des deux inégalités de gauche est stricte, alors $\varphi(f)<1$, donc :

$$\int_0^{1/2} f(t)dt=-\int_{1/2}^1 f(t)dt=\frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\int_0^{1/2} f(t)dt=\frac{1}{2}=\int_0^{1/2}dt\quad\Rightarrow\quad\int_0^{1/2}\left[1-f(t)\right]dt=0.$$

Or, $1-f$ est continue et positive sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ (car 1 majore f), donc $1-f=0$ sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

De même, $\int_{1/2}^1\left[1+f(t)\right]dt=0$ avec $1+f$ est continue et positive sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, donc $1+f=0$ sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1$, ce qui contredit le résultat précédent. Donc, l'existence de $f\in A$ telle que $|\varphi(f)|=1$ entraine une absurdité, ce qui permet de conclure que pour tout $f\in A$, $|\varphi(f)|<1$ et ainsi :

$$\boxed{\sup_{f\in A}|\varphi(f)|\text{ n'est pas un maximum.}}$$

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F convergeant vers $f\in E$ (pour la norme infinie), soit :

$$\lim_{n\to+\infty}N_\infty(f_n-f)=0.$$

On veut montrer que $f\in F$, autrement dit que $\varphi(f)=\int_0^{1/2}f(t)dt-\int_{1/2}^1 f(t)dt=1$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(f_n)=\int_0^{1/2}f_n(t)dt-\int_{1/2}^1 f_n(t)dt=1$ et :

$$\begin{aligned}|\varphi(f)-1|&=|\varphi(f)-\varphi(f_n)|\\&=\left|\left(\int_0^{1/2}f(t)dt-\int_{1/2}^1 f(t)dt\right)-\left(\int_0^{1/2}f_n(t)dt-\int_{1/2}^1 f_n(t)dt\right)\right|\\&=\left|\left(\int_0^{1/2}f(t)dt-\int_0^{1/2}f_n(t)dt\right)-\left(\int_{1/2}^1 f(t)dt-\int_{1/2}^1 f_n(t)dt\right)\right|\\&=\left|\int_0^{1/2}\left[f(t)-f_n(t)\right]dt-\int_{1/2}^1\left[f(t)-f_n(t)\right]dt\right|\end{aligned}$$

Donc :

$$\left|\varphi(f)-1\right| \leq \left|\int_0^{1/2}\left[f(t)-f_n(t)\right]dt\right| + \left|\int_{1/2}^1\left[f(t)-f_n(t)\right]dt\right| \leq \int_0^{1/2}\left|f(t)-f_n(t)\right|dt + \int_{1/2}^1\left|f(t)-f_n(t)\right|dt .$$

Et :

$$\int_0^{1/2}\left|f(t)-f_n(t)\right|dt + \int_{1/2}^1\left|f(t)-f_n(t)\right|dt = \int_0^1\left|f(t)-f_n(t)\right|dt \leq \int_0^1 N_\infty(f_n-f)dt = N_\infty(f_n-f) .$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\varphi(f)-1\right| \leq N_\infty(f_n-f)$ et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $\left|\varphi(f)-1\right| \leq 0$, soit $\varphi(f)=1$ et donc $f \in F$. Ceci prouve que :

$$\boxed{F \text{ est fermé.}}$$

La distance de la fonction nulle à F est $\inf\limits_{f\in F} N_\infty(0-f) = \inf\limits_{f\in E,\varphi(f)=1} N_\infty(f)$.

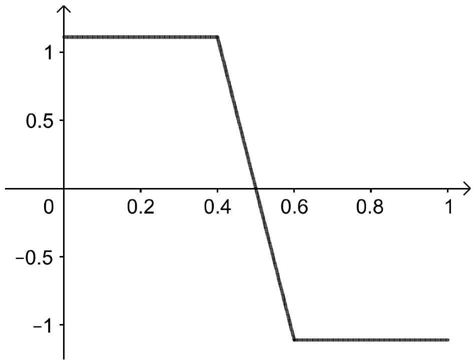
On prouve comme ci-dessus que pour tout $f \in E$, $\left|\varphi(f)\right| \leq N_\infty(f)$, donc pour tout $f \in F$, $1 \leq N_\infty(f)$ et :

$$\inf_{f\in E,\varphi(f)=1} N_\infty(f) \geq 1.$$

Introduisons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{2n-1} & \text{pour } t \in \left[0, \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}\right] \\ -\dfrac{2n^2}{2n-1}(2t-1) & \text{pour } t \in \left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right] \\ -1-\dfrac{1}{2n-1} & \text{pour } t \in \left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente f_5 :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in E$ et :

$$\int_0^{1/2} f_n(t)dt = -\int_{1/2}^1 f_n(t)dt = \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\times\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

Donc, $\varphi(f_n)=1$ et $f_n \in F$.

De plus, $N_\infty(f_n) = 1+\dfrac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Avec $\inf\limits_{f\in E,\varphi(f)=1} N_\infty(f) \geq 1$, ceci prouve que $\inf\limits_{f\in E,\varphi(f)=1} N_\infty(f) = 1$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La distance de la fonction nulle à } F \text{ est } 1.}$$