DM n° 10

Exercice 5 - E3A - Maths1 - PSI - 2016

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et φ_x la fonction qui à tout réel t associe $\varphi_x(t) = \max(x, t)$.

1.1 Donner une représentation graphique de φ_x.

1.2 Calculer $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

1.3 Donner une représentation graphique de Φ.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et on admet que l'on définit une variable aléatoire Y, définie sur le même espace probabilisé par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\,\mathrm{d}t$$

2. Dans cette question, X suit une loi géométrique. Déterminer $Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3. Dans cette question, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

3.1 Donner $X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = x])$ où $x \in X(\Omega)$, l'espérance et la variance de X.

3.2 Déterminer $Y(\Omega)$ et donner la loi de probabilité de Y.

4. On suppose dans cette question que l'on a : $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \dfrac{1}{2}, 2\right\}$ et que :

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3}$$

4.1 Déterminer la valeur de $\mathbb{P}\left(X = \dfrac{1}{2}\right)$.

4.2 Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y puis calculer son espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$.

4.3 On note Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé par $Z = XY$.

Justifier que $Z(\Omega) = \left\{-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{5}{16}, 4\right\}$.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

4.4 Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ des deux variables aléatoires X et Y.

Exercice 3 - E3A - PSI - 2017

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possible est noté Ω.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.

On considère alors une suite $(X_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que les variables aléatoires X_0, X_1, $\ldots$, X_k et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraîne l'existence de l'espérance de Y. On pourra constater que $([T = j])_{j \in [\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'évènements.

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.

3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)\,\mathbb{E}(T)$.