EXERCICE 3. On pose, lorsque cela est possible, $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2. En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

3. Calculer $f(1)$. (On pourra utiliser l'application $\varphi : u\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto\varphi(u)=\ \mathrm{ch}(u)$).

4. Calculer $f(2)$. (On pourra remarquer que la dérivée de $x\longmapsto\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ est égale à $x\longmapsto\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$)

5. Vérifier que f est positive sur I.

6. Montrer que f est décroissante sur I.

7. Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$.

Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8. Soit $x\in I$. Démontrer la relation :

$$f(x+2)=\frac{x}{x+1}\,f(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10. Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$\phi(x)=x\,f(x)\,f(x+1)$$

Prouver que $\phi(x+1)=\phi(x)$.

Calculer $\phi(n)$ pour tout entier naturel n non nul.

11. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

12. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)\,f(n+1)=\dfrac{\pi}{2n}$.

En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

13. En utilisant des parties entières, prouver que : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$

14. Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15. Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.