

Corrigés des TD du chapitre 1
Exercice 1

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $u_n > 0$ et :

$$\ln(n^2 u_n) = 2 \ln n + (\ln n)^2 - n \ln(\ln n) = n \left(2 \frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n} - \ln(\ln n) \right).$$

Or :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 u_n) = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0 \Rightarrow u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc :

La série converge.

b. On a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \rightarrow 0$ (car $\alpha > 0$), donc :

$$u_n = \ln \left(1 + \sin \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right) = \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o \left(\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)^2 \right) \right] = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} \right)$$

Or, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ vérifie le critère spécial des séries alternées (car $\alpha > 0$), donc elle converge.

Alors, $\sum u_n$ converge si et seulement si la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge, autrement dit :

 La série converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2} &= \frac{j^{3n}}{\sqrt{3n}} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3n}} + \frac{j}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^2}{\sqrt{3n+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3n}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3n+2}} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}} - \frac{1}{\sqrt{3n+2}} \right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}] &= \frac{1}{2\sqrt{3n}} \left(2 - \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{2}{3n} \right)^{-1/2} \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3n}} \left[2 - \left(1 - \frac{1}{6n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) - \left(1 - \frac{1}{3n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right] = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{n\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}] &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+1}\sqrt{3n+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3n+1}\sqrt{3n+2}(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n+1})} \\ &= \frac{1}{6n\sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{3n}} \sqrt{1 + \frac{2}{3n}} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{3n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3n}} \right)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\operatorname{Re}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}] \sim \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}] \sim \frac{1}{12n\sqrt{n}}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge. Alors, les séries $\sum \operatorname{Re}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}]$, $\sum \operatorname{Im}[u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}]$ et donc $\sum [u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}]$ convergent.

Or, si on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, on a pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} S_{3n} &= u_1 + u_2 + \sum_{k=1}^n [u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}] - u_{3n+1} - u_{3n+2} \\ S_{3n+1} &= u_1 + u_2 + \sum_{k=1}^n [u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}] - u_{3n+2} \\ S_{3n+2} &= u_1 + u_2 + \sum_{k=1}^n [u_{3k} + u_{3k+1} + u_{3k+2}] \end{aligned}$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, les trois suites (S_{3n}) , (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergent vers la même limite et donc :

La série converge.

d. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$ et $\frac{1}{n} = o(u_n)$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum u_n$ diverge aussi.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

On a $f'(t) \leq 0$ pour $t \geq e$, donc f est continue (car dérivable), positive et décroissante sur $[e; +\infty[$.

De plus, $\int_1^n f(t) dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^n = \frac{(\ln n)^2}{2} \rightarrow +\infty$ donc, par comparaison série-intégrale, $S_n \sim \int_1^n f(t) dt$, soit :

La série diverge et $S_n \sim \frac{(\ln n)^2}{2}$

e. La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ est définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t) = \frac{1 - 2 \ln t}{t^3}.$$

On a $f'(t) \leq 0$ pour $t \geq \sqrt{e}$, donc f est continue (car dérivable), positive et décroissante sur $[\sqrt{e}; +\infty[$.

De plus, en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_1^n f(t) dt = \int_1^n \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \ln t \right]_1^n - \int_1^n \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \left[-\frac{1}{t} \ln t - \frac{1}{t} \right]_1^n = 1 - \frac{1 + \ln n}{n} \rightarrow 1$$

Alors, par comparaison série-intégrale, la série converge et on a, pour tout entier $n \geq 2$:

$$0 \leq \frac{1 + \ln n}{n} - R_n \leq \frac{\ln n}{n^2} \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} \leq R_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Comme $\frac{\ln n}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, on a :

La série converge et $R_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

a. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - 4 \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 4 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4 \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} + 3 + \frac{1}{n+1} = 3 + \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \\ &= 3 + \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{4}{2n+1} \end{aligned}$$

Or, en posant $f(t) = \frac{1}{1+t}$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, qui est une somme de Riemann. Comme la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 + \frac{1}{n+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} - \frac{4}{2n+1} \right] = 3 - 4 \ln 2.$$

Ainsi :

La série $\sum u_n$ converge et sa somme est $6(3 - 4 \ln 2)$.

b. Posons $f(t) = \frac{\ln t}{t}$, $I_n = \int_1^n f(t) dt$ et $v_n = \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} - \int_3^n f(t) dt$ pour tout entier $n \geq 3$.

D'après la question d de l'exercice précédent, f est continue, positive et décroissante sur $[e; +\infty[$ et

$I_n = \frac{(\ln n)^2}{2}$. Par comparaison série-intégrale, on a pour tout entier $n \geq 3$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \frac{\ln n}{n}.$$

En sommant de 3 à $n \geq 3$, on obtient :

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln 3}{3} \leq \int_3^{n+1} f(t) dt \\ \int_3^n f(t) dt + \int_n^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{n+1} \leq \frac{\ln 3}{3} \\ \int_n^{n+1} f(t) dt \leq v_n \end{cases}$$

Comme $v_3 = \frac{\ln 3}{3}$, on a pour tout entier $n \geq 3$:

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq v_n \leq \frac{\ln 3}{3}.$$

De plus, $v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} f(t) dt \leq 0$, donc $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante minorée (par 0) : elle converge.

Enfin, on a $\int_3^n f(t) dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_3^n = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$, donc $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel a et :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{1}{2} (\ln n)^2 + a + o(1)}$$

On a vu dans que la suite $\left(\frac{\ln n}{n} \right)_{n \geq 3}$ est décroissante. De plus, elle converge vers 0 (par croissances comparée),

donc la série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées donc converge. Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} u_k &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} &= \left[\frac{1}{2} (\ln n)^2 + a + o(1) \right] - \left[\frac{1}{2} (\ln 2n)^2 + a + o(1) \right] = \frac{1}{2} (\ln n)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2n)^2 + o(1) \\ &= \frac{1}{2} (\ln n)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2 + \ln n)^2 + o(1) = -\frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2 \ln n + o(1) \end{aligned}$$

Et avec $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \ln 2 (\ln n + \gamma + o(1)) - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2 \ln n + o(1) = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge et sa somme est } \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} \text{ où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}}$$

Exercice 3

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n}$. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \left[\prod_{k=1}^n (3k-1) \right]^{1/n} = \frac{1}{n} \left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{3k-1}{3k} \right) \right]^{1/n} \left[\prod_{k=1}^n (3k) \right]^{1/n} \\ &= \frac{1}{n} \left[\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k} \right) \right]^{1/n} \left[\prod_{k=1}^n 3 \right]^{1/n} \left[\prod_{k=1}^n k \right]^{1/n} = \frac{1}{n} \left[\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k} \right) \right]^{1/n} 3(n!)^{1/n} \end{aligned}$$

On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$, donc on peut écrire $n! = \varepsilon_n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n > 0$ et $\varepsilon_n \rightarrow 1$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n!)^{1/n} = e^{-\frac{\ln \varepsilon_n}{n}} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \frac{n}{e}$ et $\frac{\ln \varepsilon_n}{n} \rightarrow 0$, donc $e^{-\frac{\ln \varepsilon_n}{n}} \rightarrow 1$ et ainsi :

$$(n!)^{1/n} \sim (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \frac{n}{e}.$$

Et $(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{\ln(2\pi n)}{2n}\right) \rightarrow e^0 = 1$, donc :

$$(n!)^{1/n} \sim \frac{n}{e}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{3n} > 0$ et :

$$\ln \left(\left[\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k} \right) \right]^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{3k} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{3k} \right] - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{3k} \right] - \frac{1}{3n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

On a :

- $\ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right) + \frac{1}{3n} \sim -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3n} \right)^2$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\left(\sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{3k} \right] \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{3k} \right) + \frac{1}{3k} \right] \rightarrow 0.$$

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$, donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$.

Ainsi :

$$\ln \left(\left[\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k} \right) \right]^{1/n} \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \left[\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{3k} \right) \right]^{1/n} \rightarrow 1.$$

Finalement, on obtient $u_n \sim \frac{1}{n} 3 \frac{n}{e}$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n} = \frac{3}{e}}$$

Exercice 4

1) Comme $u_0 > 0$, une récurrence immédiate permet de prouver que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = u_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} > \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} < u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle. Si $\ell > 0$, on obtient en passant à la limite dans la relation de récurrence : $\frac{1}{\ell} = \ell + \frac{1}{\ell}$, soit $\ell = 0$, ce qui est absurde. Donc, $\ell = 0$.

Par télescopage, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_0}.$$

Comme $u_n \rightarrow 0^+$, on obtient $\sum_{k=0}^n u_k \rightarrow +\infty$ et ainsi :

La série $\sum u_n$ diverge.

2) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et en élevant au carré :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2.$$

En passant à la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \sum_{k=0}^n (u_k^2 + 2) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^n u_k^2 + 2(n+1).$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + 2n \Rightarrow \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} + u_n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 + 2n \Rightarrow \sum_{k=0}^n u_k^2 = \frac{1}{u_n^2} + u_n^2 - \frac{1}{u_0^2} - 2n.$$

Et avec $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = u_n^2 + 2$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n - 2$$

Remarquons que $\frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} = u_0^2 + 2$, donc $u_0^2 = \sum_{k=0}^0 u_k^2 = \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2$ et la relation ci-dessus reste vraie pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n - 2$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - 2n \Rightarrow \frac{1}{nu_n^2} = 2 + \frac{1}{nu_0^2} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2.$$

Or, $u_n^2 \rightarrow 0$ (car $u_n \rightarrow 0$) et la moyenne de Césaro $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$ tend aussi vers 0. Avec $u_n > 0$, on a donc :

$$\frac{1}{nu_n^2} \rightarrow 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{nu_n}} \rightarrow \sqrt{2}.$$

Soit :

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Exercice 5

1) Soit un entier $n \geq 3$. Posons $f_n(x) = x - n \ln x$. La fonction f_n est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que différence de telles fonctions et $f_n'(x) = \frac{x-n}{x} > 0$ pour $x > n$. De plus, $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$ car $n \geq 3 > e$.

La fonction f_n est continue (car dérivable) sur \mathbb{R}_+^* , donc d'après le théorème de la bijection continue :

- sur $]0; n]$, f_n est strictement décroissante de $\lim_{0^+} f_n = +\infty$ à $f_n(n) < 0$, donc s'annule exactement une fois sur cet intervalle en un réel x_n ;
- sur $[n; +\infty[$, f_n est strictement croissante de $f_n(n) < 0$ à $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$, donc s'annule exactement une fois sur cet intervalle en un réel y_n .

Comme $(E_n) : e^x = x^n \Leftrightarrow f_n(x) = 0$:

L'équation (E_n) admet exactement deux solutions strictement positives : x_n et y_n avec $0 < x_n < y_n$.

2) Pour tout entier $n \geq 3$, $f_n(1) = 1 > 0$ et $f_n(e) = e - n < 0$ donc $x_n \in]1; e[$ et :

$$x_n - n \ln x_n = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_n}{x_n} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow g(x_n) = \frac{1}{n}$$

avec $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

La fonction g est définie, continue et dérivable sur $]1; e[$ en tant que quotient de telles fonctions. Sur $]1; e[$, on a $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0$ avec $g'(x) = 0$ uniquement en e , donc g est strictement croissante de $g(1) = 0$ à $g(e) = \frac{1}{e}$.

Ainsi, g réalise une bijection continue strictement décroissante de $]1; e[$ dans $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$, g^{-1} est

strictement croissante de 1 à e . On a alors $x_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_0 g^{-1} = 1$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$$

3) Posons $z_n = x_n - 1$. D'après ce qui précède, $z_n \rightarrow 0$ et pour tout entier $n \geq 3$, $\frac{\ln(1+z_n)}{1+z_n} = \frac{1}{n}$.

Comme $z_n \rightarrow 0$, on a $\frac{\ln(1+z_n)}{1+z_n} \sim z_n$ et donc : $z_n \sim \frac{1}{n}$.

De plus, $x_n \in]1; e[$, donc $z_n > 0$. Par ailleurs, on a $y_n > n$, donc pour tout entier $n \geq 3$:

$$0 < u_n = \frac{x_n - 1}{y_n} = \frac{z_n}{y_n} < \frac{z_n}{n}.$$

Comme $\frac{z_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$, on peut conclure par comparaison que :

La série $\sum u_n$ converge.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = \alpha \ln(n+1) + \ln u_{n+1} - \alpha \ln n - \ln u_n = \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\ &= \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \alpha \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{\alpha}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$v_{n+1} - v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge et donc :

La suite v converge.

Notons λ la limite de v . On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n} = e^\lambda = k > 0$. Comme k n'est pas nul, on peut écrire :

$$u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}.$$

Alors par comparaison à une série de Riemann, on a immédiatement :

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 7

1) a. L'application σ est bien définie sur \mathbb{N}^* et à images dans \mathbb{N}^* .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, notons k_n et r_n le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 3.

On a donc $n = 3k_n + r_n = 3(k_n + 1) + r_n - 3$ avec $r_n = 0, 1$ ou 2 et :

$$n = \begin{cases} 3k_n & \text{si } r_n = 0 \\ 3(k_n + 1) - 2 & \text{si } r_n = 1 \\ 3(k_n + 1) - 1 & \text{si } r_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \sigma(n) = \begin{cases} 2k_n & \text{si } r_n = 0 \\ 4k_n + 1 & \text{si } r_n = 1 \\ 4k_n + 3 & \text{si } r_n = 2 \end{cases}$$

Remarquons que si on note ρ_n le reste de la division euclidienne de $\sigma(n)$ par 4, on a :

$$\begin{cases} r_n = 0 & \Leftrightarrow \rho_n = 0 \text{ ou } 2 \\ r_n = 1 & \Leftrightarrow \rho_n = 1 \\ r_n = 2 & \Leftrightarrow \rho_n = 3 \end{cases}$$

Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sigma(n) = \sigma(n')$. On a alors $\rho_n = \rho_{n'}$, et, d'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \rho_n = \rho_{n'} = 0 \text{ ou } 2 & \Rightarrow r_n = r_{n'} = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 2k_n = \sigma(n') = 2k_{n'} \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \\ \rho_n = \rho_{n'} = 1 & \Rightarrow r_n = r_{n'} = 1 & \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 4k_n + 1 = \sigma(n') = 4k_{n'} + 1 \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_n = k_{n'} \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \Rightarrow n = n' \\ \rho_n = \rho_{n'} = 3 & \Rightarrow r_n = r_{n'} = 2 & \Rightarrow \begin{cases} \sigma(n) = 4k_n + 3 = \sigma(n') = 4k_{n'} + 3 \\ r_n = r_{n'} \end{cases} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on obtient $n = n'$ quand $\sigma(n) = \sigma(n')$, donc σ est injective.

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ tel $N = 4K_N + \rho_N$ est la division euclidienne de N par 4. On a alors :

$$\begin{cases} \rho_N = 0 \text{ ou } 2 & \Rightarrow N = \sigma\left(\frac{3}{2}N\right) \\ \rho_N = 1 & \Rightarrow N = \sigma\left(3\frac{N-1}{4} + 1\right) \\ \rho_N = 3 & \Rightarrow N = \sigma\left(3\frac{N-3}{4} + 2\right) \end{cases}$$

Donc, N admet un antécédent par σ . Ceci prouve que σ est surjective.

Finalement, σ est injective et surjective, donc bijective de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* , donc :

σ est bien une permutation de \mathbb{N}^* .

b. La série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

La série $\sum u_n$ converge.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_{\sigma(k)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \sum_{j=1}^n (u_{\sigma(3j-2)} + u_{\sigma(3j-1)} + u_{\sigma(3j)}) = \sum_{j=1}^n (u_{4j-3} + u_{4j-1} + u_{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^{4j-2}}{\sqrt{4j-3}} + \frac{(-1)^{4j}}{\sqrt{4j-1}} + \frac{(-1)^{2j+1}}{\sqrt{2j}} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{4j-3}} + \frac{1}{\sqrt{4j-1}} - \frac{1}{\sqrt{2j}} \right) \end{aligned}$$

Et :

$$\frac{1}{\sqrt{4j-3}} + \frac{1}{\sqrt{4j-1}} - \frac{1}{\sqrt{2j}} = \frac{1}{2\sqrt{j}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4j}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4j}}} - \sqrt{2} \right) \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{j}}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{j}}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n} = +\infty$, et donc :

La série $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.

2) On montre comme plus haut que σ est bien une permutation de \mathbb{N}^* .

La série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

La série $\sum u_n$ converge.

Comme plus haut, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n u_{\sigma(k)}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^{3n} u_{\sigma(k)} = \sum_{j=1}^n (u_{\sigma(3j-2)} + u_{\sigma(3j-1)} + u_{\sigma(3j)}) = \sum_{j=1}^n (u_{2j-1} + u_{4j-2} + u_{4j}) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{(-1)^{2j}}{2j-1} + \frac{(-1)^{4j-1}}{4j-2} + \frac{(-1)^{4j+1}}{4j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j(2j-1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (u_{2j-1} + u_{2j}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} u_j \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{2n} u_j = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Comme $u_{\sigma(n)} \rightarrow 0$ ($u_n \rightarrow 0$ et $\sigma(n) \rightarrow +\infty$), on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [S_{3n} + u_{\sigma(3n+1)} + u_{\sigma(3n+2)}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, autrement dit :

La série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, avec $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par intégration par parties :

$$\int_0^1 t \cos(nt) dt = \left[t \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(nt)}{n} dt = \left[t \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^1 + \left[\frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^1 = \frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n - 1}{n^2} = u_n - v_n.$$

Donc, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_0^1 t \cos(nt) dt + v_n$$

2) La fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sin t}$ est de classe C^1 sur $]0; \frac{1}{2}[$ en tant que quotient de telles fonctions, avec :

$$f'(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t}.$$

On a $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$, donc f se prolonge par continuité en 0 (en posant $f(0) = 1$) et :

$$f'(t) = \frac{\sin t - t \cos t}{\sin^2 t} = \frac{(t + o_0(t^2)) - t(1 + o_0(t))}{t^2 + o_0(t^2)} = \frac{o_0(1)}{1 + o_0(1)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 0.$$

La fonction f , prolongée par continuité en 0, est alors de classe C^1 en 0, avec $f'(0) = 0$.

Finalement :

$$\text{La fonction } f \text{ se prolonge en une fonction de classe } C^1 \text{ sur } \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0; 1]$, $e^{it} \neq 1$ et :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n t \cos(kt) &= t \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = t \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right] = t \operatorname{Re} \left[e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} \right] = t \operatorname{Re} \left[e^{it} \frac{e^{\frac{int}{2}} (e^{\frac{int}{2}} - e^{-\frac{int}{2}})}{e^{\frac{it}{2}} (e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}})} \right] \\ &= t \operatorname{Re} \left[e^{\frac{i(n+1)t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right] = t \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = t \frac{\sin\left(\frac{nt}{2} + \frac{(n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{nt}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \\ &= t \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{t}{2} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} t \end{aligned}$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\sum_{k=1}^n t \cos(kt) = f\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \frac{1}{2} t$$

4) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 t \cos(kt) dt + v_k \right) \\
 &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n t \cos(kt) \right] dt + \sum_{k=1}^n v_k \\
 &= \int_0^1 \left[f\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \frac{1}{2}t \right] dt + \sum_{k=1}^n v_k \\
 &= \int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t dt + \sum_{k=1}^n v_k \\
 &= \int_0^1 f\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n v_k \\
 &= 2 \int_0^{1/2} f(u) \sin((2n+1)u) du - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n v_k \quad (\text{avec } u = \frac{t}{2})
 \end{aligned}$$

Comme f (prolongée) est de classe C^1 sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= 2 \left(\left[-f(u) \frac{\cos((2n+1)u)}{2n+1} \right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} f'(u) \frac{\cos((2n+1)u)}{2n+1} du \right) - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n v_k \\
 &= \frac{2}{2n+1} \left(1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) + \int_0^{1/2} f'(u) \cos((2n+1)u) du \right) - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n v_k
 \end{aligned}$$

Comme f (prolongée) est de classe C^1 sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $|f'|$ est majorée par un réel M et :

$$\left| 1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) + \int_0^{1/2} f'(u) \cos((2n+1)u) du \right| \leq 1 + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}M.$$

Alors :

$$\frac{2}{2n+1} \left(1 - f\left(\frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\right) + \int_0^{1/2} f'(u) \cos((2n+1)u) du \right) \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n = \frac{1 - \cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$, donc par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum v_n$ converge.

Ainsi :

La série $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k - \frac{1}{4}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\sin(n+1)}{n} = \frac{\sin n \cos 1 + \cos n \sin 1}{n} = \frac{\sin n}{n} \cos 1 + \frac{\cos n}{n} \sin 1.$$

Donc :

$$\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{\sin 1} \frac{\sin(n+1)}{n} - \frac{\cos 1 \sin n}{\sin 1} = \frac{1}{\sin 1} u_{n+1} - (\cotan 1) u_n + \frac{1}{\sin 1} \frac{\sin(n+1)}{n(n+1)}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{\sin(n+1)}{n(n+1)} \right| = \frac{|\sin(n+1)|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Ainsi, la série $\sum \frac{\sin(n+1)}{n(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente. Comme $\sum u_n = \sum \frac{\sin n}{n}$ converge, la série $\sum \frac{\cos n}{n}$ converge, ainsi que la série $\sum \frac{\cos n + i \sin n}{n}$. Ceci prouve que :

La série $\sum \frac{e^{in}}{n}$ converge.

Exercice 9

Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à termes positifs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$:

$$0 \leq u_{2n} \leq u_k.$$

Donc :

$$0 \leq nu_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0$, donc d'après le théorème de gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n} = 0$, soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n} = 0.$$

On a de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$, donc :

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} = 2nu_{2n} + u_{2n}.$$

Comme $\sum u_n$ converge, on a $u_{2n} \rightarrow 0$ et avec $nu_{2n} \rightarrow 0$, on a, à nouveau grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0.$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$ et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$$

Remarquons préalablement que pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$R_{p-1} - R_n = \sum_{k=p}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n - R_{n+1} = u_{n+1} \geq 0$ donc $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et à termes positifs (car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est). Ainsi, d'après le résultat précédent, si $\sum R_n$ converge, alors $nR_n \rightarrow 0$.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k u_k &= u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + (n-1)u_{n-1} + nu_n \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n) + (u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n) + \dots + (u_{n-1} + u_n) + u_n \\ &= (R_0 - R_n) + (R_1 - R_n) + \dots + (R_{n-2} - R_n) + (R_{n-1} - R_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} R_k - nR_n \end{aligned}$$

Ainsi, si $\sum R_n$ converge, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n k u_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} R_k - n R_n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k - \lim_{n \rightarrow +\infty} n R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k .$$

Et ainsi :

Si $\sum R_n$ converge alors $\sum n u_n$ converge vers la même somme.

Exercice 10

Comme $x \in]-1; 1[$, la série $\sum x^n$ est absolument convergente.

Donc le produit de Cauchy $\sum u_n$ (avec $u_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k}$) converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2$. Or :

$$u_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n x^n = (n+1)x^n .$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)^2 .$$

Enfin, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ car $|x| < 1$ et ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Exercice 11

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$. Posons $n = E\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right) \in \mathbb{N}^*$. On a alors $2^n \leq N < 2^{n+1}$ et, comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive :

$$\sum_{k=0}^{2^n} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k \leq \sum_{k=0}^{2^{n+1}} u_k \quad (1).$$

On a $\sum_{k=0}^{2^n} u_k = u_0 + u_1 + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \right)$ et, comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(2^p - 2^{p-1})u_{2^p} \leq \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \leq (2^p - 2^{p-1})u_{2^{p-1}+1} \leq (2^p - 2^{p-1})u_{2^{p-1}} .$$

Or, $(2^p - 2^{p-1})u_{2^p} = (2^p - 2^{p-1})u_{2^p} = (2-1)2^{p-1}u_{2^p} = \frac{1}{2}v_p$ et de même, $(2^p - 2^{p-1})u_{2^{p-1}+1} = 2^{p-1}u_{2^{p-1}+1} = v_{2^{p-1}}$. Alors :

$$\frac{1}{2}v_p \leq \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \leq v_{2^{p-1}}$$

Donc :

$$u_0 + u_1 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \leq u_0 + u_1 + \sum_{p=1}^n \left(\sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} u_k \right) \leq u_0 + u_1 + \sum_{p=1}^n v_{2^{p-1}} \Leftrightarrow u_0 + u_1 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \leq \sum_{k=0}^{2^n} u_k \leq u_0 + u_1 + \sum_{p=0}^{n-1} v_{2^p} .$$

De même, $u_0 + u_1 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n+1} v_p \leq \sum_{k=0}^{2^{n+1}} u_k \leq u_0 + u_1 + \sum_{p=0}^n v_{2^p}$ et l'encadrement (1) donne :

$$u_0 + u_1 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \leq \sum_{k=0}^N u_k \leq u_0 + u_1 + \sum_{p=0}^n v_{2^p} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p \leq \sum_{k=2}^N u_k \leq \sum_{p=0}^n v_{2^p}.$$

Comme $n = E\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right) \rightarrow +\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$ et comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs, on peut conclure par comparaison que :

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 12

1) D'après les hypothèses, on a $f(x) = a_0 + o(1)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = a_0$.

Ainsi, si $a_0 \neq 0$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $a_0 = 0$, on a $f(x) = \frac{a_1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et si $a_1 \neq 0$, $u_n \sim \frac{a_1}{n}$, donc $\sum u_n$ diverge car la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Si $a_0 = a_1 = 0$, alors $u_n = \frac{a_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc soit $u_n \sim \frac{a_2}{n^2}$ si $a_2 \neq 0$, soit $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ si $a_2 = 0$. Dans les deux cas, la série $\sum u_n$ converge.

Finalement :

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a_0 = a_1 = 0$.

2) Remarquons déjà que si la suite (u_n) s'annule à un rang N , alors la suite (v_n) est nulle à partir du rang N , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Dans la suite, on suppose que (u_n) ne s'annule pas et donc (v_n) non plus.

Supposons dans un premier temps que $a_0 = 0$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a_0 = 0$ et à partir d'un certain rang N , on a $|u_n| \leq \frac{1}{2}$ et pour tout entier $n > N$:

$$|v_n| = \prod_{k=1}^n |u_k| = \prod_{k=1}^N |u_k| \times \prod_{k=N+1}^n |u_k| = |v_N| \prod_{k=N+1}^n |u_k| \leq |v_N| \frac{1}{2^{n-N}} = \frac{2^N |v_N|}{2^n}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On suppose maintenant que $a_0 \neq 0$. On peut alors écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \prod_{k=1}^n u_k = a_0^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{u_k}{a_0}\right) \Rightarrow \frac{v_n}{a_0^n} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{u_k}{a_0}\right)$$

avec $\frac{u_n}{a_0} = 1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $b_k = \frac{a_k}{a_0}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{a_0} = 1$, donc $\frac{u_n}{a_0} > 0$ à partir d'un certain rang N et pour tout entier $n > N$:

$$\frac{v_n}{a_0^n} = \prod_{k=1}^N \left(\frac{u_k}{a_0} \right) \times \exp \left[\sum_{k=N+1}^n \ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) \right] = \frac{v_N}{a_0^N} \times \exp \left[\sum_{k=N+1}^n \ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) \right].$$

On a de plus :

$$\ln \left(\frac{u_n}{a_0} \right) = \ln \left[1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{b_1}{n} + \left(b_2 - \frac{1}{2} b_1^2 \right) \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

On montre alors comme plus haut que la série $\sum \ln \left(\frac{u_n}{a_0} \right)$ converge si et seulement si $b_1 = 0$, soit $a_1 = 0$.

Si $a_1 = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{a_0^n} = \frac{v_N}{a_0^N} \times \exp \left[\sum_{k=N+1}^{+\infty} \ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) \right] = K \neq 0$, donc $v_n \sim K a_0^n$ et la suite (v_n) converge si et seulement si $-1 < a_0 \leq 1$.

Si $a_1 \neq 0$, alors $b_1 \neq 0$ et $\ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) - \frac{b_1}{k} = \left(b_2 - \frac{1}{2} b_1^2 \right) \frac{1}{k^2} + o \left(\frac{1}{k^2} \right)$, donc $\sum \left[\ln \left(\frac{u_n}{a_0} \right) - \frac{b_1}{n} \right]$ converge.

Si on note $S = \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left[\ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) - \frac{b_1}{k} \right]$, on a :

$$\sum_{k=N+1}^n \left[\ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) - \frac{b_1}{k} \right] = \sum_{k=N+1}^n \ln \left(\frac{u_k}{a_0} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{b_1}{k} + \sum_{k=1}^N \frac{b_1}{k} = S + o(1).$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{v_n}{a_0^n} &= \frac{v_N}{a_0^N} \times \exp \left[b_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{b_1}{k} + S + o(1) \right] \\ &= \frac{v_N}{a_0^N} \times \exp \left[b_1 \ln n + b_1 \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{b_1}{k} + S + o(1) \right] \\ &= n^{b_1} \frac{v_N}{a_0^N} \times \exp \left[b_1 \gamma - \sum_{k=1}^N \frac{b_1}{k} + S + o(1) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{v_n}{a_0^n n^{b_1}} \rightarrow K \neq 0$, donc $v_n \sim K a_0^n n^{b_1}$ et, avec $b_1 \neq 0$:

- si $-1 < a_0 < 1$, alors $v_n = o \left(\left(\frac{a_0 + 1}{2} \right)^n \right)$ avec $0 < \frac{a_0 + 1}{2} < 1$, donc $v_n \rightarrow 0$;
- si $|a_0| > 1$, alors $|v_n| \rightarrow +\infty$ (par croissances comparées) ;
- si $|a_0| = 1$ et $b_1 > 0$, alors $|v_n| \rightarrow +\infty$;
- si $|a_0| = 1$ et $b_1 < 0$, alors $v_n \rightarrow 0$;

Finalement :

La suite (v_n) converge quand (u_n) s'annule ou $-1 < a_0 < 1$ ou $(a_1 = 0$ et $a_0 = 1)$ ou $(a_0 = \pm 1$ et $\frac{a_1}{a_0} < 0)$.