

## Résumé du chapitre 1 : Séries numériques

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite de  $\mathbb{K}$ .

### Définitions fondamentales

- La série de terme général  $u_n$  est la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  avec  $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ , appelé somme partielle de la série. On note souvent la série  $\sum u_n$ .
- La série converge si et seulement si la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$  converge.
- Une série qui ne converge pas est dite divergente.
- En cas de convergence, on appelle somme de la série la limite de la suite  $(S_n)_{n \geq n_0}$ , notée indifféremment  $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$  ou  $\sum_{n \geq n_0} u_n$ .
- Si  $\sum u_n$  converge et a pour somme  $S$ , le reste d'ordre  $n$  est  $R_n = S - S_n = \sum_{k \geq n+1} u_k$ .

*Remarque : La suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge si et seulement si la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge avec  $u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$  pour tout  $n > n_0$  (c'est le télescopage).*

### Propriétés générales

- *Condition nécessaire de convergence* : Si  $\sum u_n$  converge alors la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  tend vers 0.
- Si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.
- Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente.

*Attention : la réciproque est fausse.*

*En particulier, ce n'est pas parce que  $\sum (u_n + v_n)$  converge que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent.*

- Une série de nombres complexes converge si et seulement si les séries des parties réelles et imaginaires convergent.

### Absolue convergence

- On dit que la série  $\sum u_n$  est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  converge.

*Attention :  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue pour une suite réelle et le module pour une suite complexe).*

- La série  $\sum u_n$  est semi-convergente si elle est convergente, mais pas absolument convergente.
- Théorème fondamental :

Si  $\sum u_n$  est absolument convergente alors  $\sum u_n$  est convergente et  $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$ .

*La réciproque est fausse !*

### Séries à termes positifs

On suppose ici que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \geq 0$  (la série est donc réelle).

- Pour que la série  $\sum u_n$  à termes positifs converge, il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée (et alors  $\sum_{n \geq n_0} u_n = \sup_{n \geq n_0} S_n$ ).
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont des séries à termes positifs telles que  $\sum v_n$  converge, alors :  

$$u_n = O(v_n) \text{ ou } u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

*Remarque : Ces propriétés se généralisent au cas des séries à termes de signe constant.*

### Règle de d'Alembert

On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$ . Alors :

$$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

### Séries alternées (réelles)

- La série réelle  $\sum u_n$  est alternée si pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n u_{n+1} \leq 0$  ( $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont de signes contraires et on a alors  $u_n = (-1)^n |u_n|$  ou  $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ ).
- Critère spéciale de convergence des séries alternées :

Si  $\sum u_n$  est alternée et  $(|u_n|)_{n \geq n_0}$  décroît vers 0, alors :

- $\sum u_n$  converge ;
- pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$  et  $R_n$  et  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  sont de même signe.

### Comparaison avec une intégrale

Si  $u_n = f(n)$ , avec  $f$  à valeurs réelles, continue par morceaux et décroissante sur  $[n_0; +\infty[$  alors :

$$\forall n \geq p \geq n_0, \int_{p+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=p+1}^n u_k \leq \int_p^n f(t) dt.$$

La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, avec  $I_n = \int_0^n f(t) dt$ .

**Non mentionné dans le programme :**

- En cas de convergence, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq (I - I_n) - R_n \leq u_n$  avec  $I = \lim I_n$ .
- En cas de divergence, on a  $S_n \sim I_n$ .

### Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n.$$

**Séries de référence**

- Séries géométriques : Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum z^n$  converge vers  $\frac{1}{1-z}$  si et seulement si  $|z| < 1$ .

- Séries de Riemann :  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

En cas de convergence :  $S_n \sim \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$  ; en cas de divergence :  $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ .

- Série exponentielle : Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge vers  $e^z$ .

**Produit de Cauchy**

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont deux séries, leur produit de Cauchy est la suite de terme général  $w_n$  défini par  $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ .
- Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes, alors la série  $\sum w_n$  l'est aussi et sa somme est le produit des sommes de  $\sum u_n$  et de  $\sum v_n$ .