

## Stage de pré-rentrée

### Exercice 1 : Symboles $\Sigma$ et $\Pi$

On note :

- $\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$  avec toujours  $p \leq n$ .
- $\prod_{k=p}^n a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n$  avec toujours  $p \leq n$ .
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^n k$  ( $n!$  se lit «  $n$  factoriel » ou « factoriel  $n$  »).

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer les sommes et produits suivants.

- 1)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  en remarquant que  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .
- 2)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$  en cherchant trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ .
- 3) Avec  $u_n = (-2)^n$  :
 

a. $\sum_{k=0}^n u_k$	b. $\sum_{k=1}^n u_k$	c. $\sum_{k=0}^{2n} u_k$	d. $\sum_{k=n}^{2n} u_k$	e. $\sum_{k=0}^n u_{2k}$
f. $\sum_{k=0}^n (u_k + n)$	g. $\sum_{k=0}^n u_k + n$	h. $\sum_{k=0}^n (u_k + k)$	i. $\sum_{k=0}^n u_{k+n}$	j. $\sum_{k=0}^n u_{nk}$
- 4)  $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + v_k)$  avec :
 

a. $v_n = -\frac{1}{n+1}$	b. $v_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$	c. $v_n = -\frac{2}{(n+1)(n+2)}$
---------------------------	-------------------------------	----------------------------------
- 5)  $\sum_{k=0}^n kx^k$ . ☺ On pourra dériver la fonction polynomiale  $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n$ .

### Problème 1 : Un problème d'analyse

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(0) = 1$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}.$$

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé.

#### **Partie A : Etude de fonction**

- 1) Prouver que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2) On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} - 1 + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 e^{-t} dt$ .

a. Montrer que  $h$  est la fonction nulle et en déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt.$$

b. En déduire que :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^3}{6} e^x$  ( $\odot \forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq e^{-t} \leq 1$ );
- $\forall x \in \mathbb{R}_-, \frac{x^3}{6} \leq e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \leq 0$  ( $\odot \forall x \in \mathbb{R}_-, \forall t \in [x, 0], 0 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$ ).

c. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ , puis que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} e^x \right) = \frac{1}{2}$ .

d. Montrer alors que  $f$  est dérivable en 0 et donner  $f'(0)$ .

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

3) Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et calculer  $f'(x)$ .

4) A l'aide de la question 2.c, montrer que  $f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

5) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x - 1 - x \geq 0$ , avec égalité seulement en 0.

En déduire le sens de variation de  $f$ .

6) Construire le tableau de variations complet de  $f$  (limites incluses).

7) Que peut-on déduire pour  $\mathcal{C}$  de la limite de  $f$  en  $-\infty$  ?

8) On pose  $g(x) = f(x) - x$ . Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ . En déduire que  $\mathcal{C}$  admet en  $+\infty$  une asymptote oblique  $\Delta$  que l'on précisera.

9) Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .

10) Tracer  $\mathcal{C}$  en représentant tous les éléments graphiques obtenus plus haut.

### Partie B : Etude d'une suite récurrente

Dans cette partie, on définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1) A l'aide de la partie A, déterminer le sens de variation de  $u$ .

2) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ? Justifier.

3) Déterminer la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Partie C : Etude d'une suite implicite

1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Prouver que l'équation  $f(nx) = n$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ . On note cette solution  $x_n$ . Que vaut  $x_1$  ?

2) Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = 1 - e^{-nx_n}$ . En déduire que  $x_n \in [0, 1[$ .

3) Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(n+1)x_{n+1} > nx_n$ .

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.

5) Prouver que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1.

**Exercice 2 : La série harmonique**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

- 1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En remarquant que pour tout réel  $t \in [k, k+1]$ , on a  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ , montrer que :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

- 2) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Puis que :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

- 3) En déduire la limite de  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et celle de  $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

- 4) On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ .

a. Déterminer le sens de variation de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

b. Par un raisonnement analogue à celui des questions précédentes, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2$ .

- 5) On pose  $u_n = H_n - \ln n$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante, puis qu'elle converge.  
La limite de  $u$  est appelée constante d'Euler et notée  $\gamma$ .

**Exercice 3 : Equations différentielles**

- 1) Soient  $h$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel fixé. On considère l'équation différentielle :

$$(E): y' + ay = h.$$

a. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = e^{ax} f(x)$ .

Après avoir justifié que  $g$  est bien dérivable sur  $\mathbb{R}$ , montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = e^{ax} h(x)$ .

b. Déterminer alors toutes les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  (en faisant apparaître  $x \mapsto \int_0^x e^{at} h(t) dt$ ).

- 2) On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(E'): y'' - 3y' + 2y = 0.$$

a. Déterminer les solutions de l'équation  $r^2 - 3r + 2 = 0$ .

b. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On pose  $g = f' - f$ .

Après avoir justifié que  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , montrer que  $f$  est solution de  $(E')$  sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $g$  est solution de  $(E'')$ :  $z' - 2z = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

c. Résoudre  $(E'')$ , puis  $(E')$  à l'aide de la question 1.

### **Exercice 4 : Probabilités**

Le tarot se joue à quatre ou parfois à trois joueurs, avec un jeu de 78 cartes : les 52 cartes usuelles, plus quatre cavaliers (un de chaque couleur), plus 21 atouts (numérotés de 1 à 21), plus une carte spéciale appelée « excuse ». On appelle « bouts », les trois cartes suivantes : le 1 et le 21 d'atout et l'excuse.

Réaliser une donne consiste à distribuer toutes les cartes aux trois ou quatre joueurs, sauf quelques cartes (6 quand on joue à quatre et 3 quand on joue à trois) que l'on laisse initialement au milieu. Ces cartes forment ce que l'on nomme le « chien ».

- 1) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien quand on joue à quatre joueurs.
- 2) Même question quand on joue à trois joueurs. Que constate-t-on ?
- 3) Que se passe-t-il si on joue à cinq joueurs avec un chien de 6 cartes ?
- 4) On joue 10 parties d'affilées à quatre joueurs. Les donnes sont supposées indépendantes les unes des autres (on mélange les cartes à l'issue de chaque partie).
  - a. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais de bout dans le chien lors des 10 tours ?
  - b. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une fois un bout dans le chien ?
  - c. Quelle est la probabilité qu'il y ait cinq fois un bout dans le chien ?
  - d. En moyenne, pour combien de parties sur 10 y aura-t-il au moins un bout dans le chien ?

### **Problème 2 : Intégrales de Wallis et formule de Stirling**

#### **Partie A : Les intégrales de Wallis**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$ .

- 1) Justifier que  $I_n$  est bien définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
- 3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .
- 4) Prouver par récurrence sur  $p$  que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{2p} > 0$  et  $I_{2p+1} > 0$ .
- 5) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Evaluer  $\prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}$ . En déduire que  $I_{2p} = \frac{\pi}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$ .
- 6) Déterminer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $I_{2p+1}$  en fonction de  $p$ .
- 7) Prouver que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ .
- 8) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$ .
- 9) Prouver que la suite  $(I_n \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
 

☺ On pourra poser  $v_n = I_n \sqrt{n}$ , commencer par prouver que  $(v_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(v_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$  sont croissantes, puis montrer par l'absurde que ces deux suites convergent.

**Partie B : La formule de Stirling**

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \ln k - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$  et, pour  $x \in [1, +\infty[$ ,  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .

- 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = 1 - f(n)$ .
- 2) En dérivant deux fois, montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$ .
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et en déduire le sens de variation strict de la suite  $u$ .
- 4) On a admet que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est positive. Justifier alors qu'elle converge vers une limite  $\ell$ .
- 5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n = e^{u_n}$ . Justifier que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge et donner sa limite  $L$  en fonction de celle de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- 6) Montrer que  $n! = v_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  et en déduire, à l'aide de la partie A, que  $\frac{v_p^2}{v_{2p}} \rightarrow \sqrt{2\pi}$ , puis que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}.$$

*Ce résultat s'appelle la formule de Stirling.*