Convergence uniforme sur tout segment d'un intervalle

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle *I*.

On suppose que la suite converge simplement vers une fonction *f* sur *I* (autrement dit, pour tout $x \in I$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$)

On veut établir une propriété de régularité de *f* sur *I* (continuité, classe C^1, C^k, C^∞).

Pour cela, il faut avoir des hypothèses sur les f_n. Pour la classe C^k, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, il faut que :

- toutes les fonctions f_n soit de classe C^k sur *I* ;
- les suites $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i = 0,1,...,k-1$ convergent simplement ;
- et **il faudrait que la suite** $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur *I*** vers une fonction *g*, définie sur *I*.

  Or, il arrive assez souvent que ce ne soit pas le cas, on a en général la convergence simple (point par point), mais pas forcément la convergence uniforme (qui dit que $\sup\limits_I \left|f_n^{(i)} - g\right|$ tend vers 0). Ceci pour deux raisons possibles :

  - Le $\sup\limits_I \left|f_n^{(i)} - g\right|$ n'existe pas.

    Exemple : $f_n(x) = \dfrac{1}{1-x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ sur $[0,1[$, mais $\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{1}{1-x^n} - 1\right| = +\infty$, donc $\sup\limits_{x\in[0,1[}\left|f_n(x)-1\right|$ n'existe pas.

  - Le $\sup\limits_I \left|f_n^{(i)} - g\right|$ existe, mais ne tend pas vers 0.

    Exemple : $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur $[0,1[$, mais $\sup\limits_{x\in[0,1[}\left|f_n(x)\right| = 1$ ne tend pas vers 0.

C'est dans ce cas que l'on peut avoir recours aux segments de *I*.

En effet, si $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers *g* sur tout segment** $[a,b]$ **de *I***, alors on peut utiliser le théorème du cours sur $[a,b]$ pour conclure que *g* est de classe C^k sur $[a,b]$.

Or, si *g* est C^k sur tout segment $[a,b]$ inclus dans *I*, elle est C^k sur leur réunion qui est *I*.

Ainsi, on peut obtenir la propriété de régularité voulue sur I, sans pour autant avoir la convergence uniforme sur *I*.

Avec les deux exemples précédents et la continuité.

Exemple 1 : $f_n(x) = \dfrac{1}{1-x^n}$ sur $[0,1[$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $x \mapsto 1$ sur $[0,1[$ et toutes les f_n sont continues sur $[0,1[$.
De plus, pour tout $a \in [0,1[$, on a :

$$\sup_{x\in[0,a]}\left|f_n(x)-1\right| = \frac{a^n}{1-a^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, il y a convergence uniforme sur $[0,a]$ et ainsi, la limite *f* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est continue sur $[0,a]$. Ceci étant vrai pour tout $a \in [0,1[$, *f* est continue sur $\bigcup_{a\in[0,1[}[0,a] = [0,1[$.

MAIS, la convergence n'est **PAS uniforme sur** $[0,1[$.

Exemple 2 : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$. A faire de la même façon.