Corrigé du DM n° 1

Partie I - La dimension 3

Q15. On a :

$$\chi_A = \det(X I_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}.$$

Comme les première et troisième colonnes de A sont égales, A n'est pas inversible, donc $\chi_A(0) = \det(-A) = 0$ et χ_A se factorise par X. On peut donc développer sans finasser (même avec Sarrus !) : on saura factoriser.

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_A = \det(X I_3 - A) = X \begin{vmatrix} X & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 2) - 2X = X(X^2 - 4).$$

Soit :

$$\boxed{\chi_A = X(X-2)(X+2)}$$

Q16. Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

Les valeurs propres sont les racines de χ_A, donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } -2, 0 \text{ et } 2.}$$

Comme A est diagonalisable, la somme des dimensions des trois sous-espaces propres de A vaut 3. Or, chacune de ces trois dimensions est un entier supérieur ou égal à 1. La seule possibilité est qu'ils valent tous les trois 1 et ainsi :

$$\boxed{\text{La dimension des trois sous-espaces propres de } A \text{ est } 1.}$$

Q17. On a :

$$\chi_B = \det(X I_3 - B) = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ X & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_B = X \begin{vmatrix} X & 2 \\ -2 & X \end{vmatrix} = X(X^2 + 4).$$

Ainsi, décomposé en facteurs irréductible on a :

$$\boxed{\chi_B = \begin{cases} X(X^2+4) & \text{dans } \mathbb{R}[X] \\ X(X+2i)(X-2i) & \text{dans } \mathbb{C}[X] \end{cases}}$$

Q18. Les valeurs propres de B ne sont pas toutes réelles, par contre, χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc :

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}\text{, mais pas dans } \mathbb{R}.}$$

Les valeurs propres sont les racines de χ_B, donc :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de } B \text{ sont } -2i,\ 0 \text{ et } 2i.}$$

Comme pour A, on a immédiatement :

$$\boxed{\text{La dimension des trois sous-espaces propres (complexes) de } A \text{ est } 1.}$$

Q19. On a $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/i & 0 \\ 0 & 0 & 1/(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc :

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\boxed{D^{-1}AD = -iB}$$

Q20. On a $\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\Delta^{-1}A\Delta = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

La matrice ci-dessus est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral. Ainsi, A est semblable à une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$$

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Q21. On a $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = \lambda_0 \sin^n x + \lambda_1 \cos x \sin^{n-1} x + \dots + \lambda_{n-1} \cos^{n-1} x \sin x + \lambda_n \cos^n x = 0 \quad \textbf{(1)}.$$

Prouvons par récurrence forte finie que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Initialisation : En évaluant la relation **(1)** en $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda_0 = 0$. La propriété est vraie au rang $k = 0$.

Hérédité : On suppose que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_{k+1} \cos^{k+1} x \sin^{n-(k+1)} x + \dots + \lambda_{n-1} \cos^{n-1} x \sin x + \lambda_n \cos^n x = 0.$$

En divisant par $\cos^{k+1} x$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2p+1)\frac{\pi}{2},\ p \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\lambda_{k+1} \sin^{n-k-1} x + \lambda_{k+2} \sin^{n-k-2} x \cos x + \dots + \lambda_n \cos^{n-k-1} x = 0.$$

Et, en faisant tendre *x* vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda_{k+1} = 0$ (par continuité des fonctions cos et sin).

Ainsi, la propriété est vraie au rang $k+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Ceci prouve que si $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$, alors $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et donc que :

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, \dots, f_n) \text{ est libre.}}$$

Autre méthode très astucieuse suggérée par Nicolas D. (des 5/2 anonymes).

Comme ci-dessus, on considère $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = \lambda_0 \sin^n x + \lambda_1 \cos x \sin^{n-1} x + \dots + \lambda_{n-1} \cos^{n-1} x \sin x + \lambda_n \cos^n x = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on a $\cos x \neq 0$ et :

$$\frac{\lambda_0 \sin^n x + \lambda_1 \cos x \sin^{n-1} x + \dots + \lambda_{n-1} \cos^{n-1} x \sin x + \lambda_n \cos^n x}{\cos^n x} = \lambda_0 \tan^n x + \lambda_1 \tan^{n-1} x + \dots + \lambda_{n-1} \tan x + \lambda_n = 0.$$

Soit en posant $P = \lambda_0 X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} X + \lambda_n$, $P(\tan x) = 0$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Comme $\tan x$ décrit $\mathbb{R}$ quand x décrit $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, le polynôme *P* s'annule en tout réel donc il est nul, autrement dit tous ses coefficients sont nuls, soit $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. *Simple et efficace !*

Par définition, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de V_n. Comme elle est libre et contient $n+1$ fonctions :

$$\boxed{\dim V_n = n+1}$$

Q22. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f_k = \cos^k \sin^{n-k}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions.

On a $f_0' = n\cos\sin^{n-1} = n f_1$, $f_n' = -n\sin\cos^{n-1} = -n f_{n-1}$ et, pour $1 \le k \le n-1$ (quand $n \ge 2$) :

$$f_k' = -k\sin\cos^{k-1}\sin^{n-k} + (n-k)\cos^k\cos\sin^{n-k-1} = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}.$$

Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{f_k' \in V_n}$$

On pose alors $\varphi_n : V_n \to V_n\ ;\ f \mapsto f'$. L'application est linéaire par linéarité de la dérivation et est bien à images dans V_n (d'après ce qui précède), donc :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est bien un endomorphisme de } V_n.}$$

On a vu que :

$$\begin{cases} \varphi_n(f_0) = n f_1 \\ \varphi_n(f_k) = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \quad \forall\, k \in [\![1,n-1]\!]. \\ \varphi_n(f_n) = -n f_{n-1} \end{cases}$$

Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{B_n = M_{(f_0, f_1, \dots, f_n)}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Q23. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g_k : x \mapsto e^{i(2k-n)x}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_k(x) = e^{i(2k-n)x} = e^{ikx}e^{i(k-n)x} = e^{ikx}e^{-i(n-k)x} = (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k}.$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{g_k(x) = (\cos x + i\sin x)^k (\cos x - i\sin x)^{n-k}}$$

Q24. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \left(\sum_{p=0}^{k} i^{k-p}\binom{k}{p}\cos^p x\sin^{k-p} x\right)\left(\sum_{q=0}^{n-k}(-i)^{n-k-q}\binom{n-k}{q}\cos^q x\sin^{n-k-q} x\right) \\ &= \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k} i^{k-p}(-i)^{n-k-q}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}\cos^p x\sin^{k-p} x\cos^q x\sin^{n-k-q} x \\ &= \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{n-k-q} i^{n-(p+q)}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}\cos^{p+q} x\sin^{n-(p+q)} x \\ &= \sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{n-k-q} i^{n-(p+q)}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q} f_{p+q}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $g_k=\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{n-k-q}i^{n-(p+q)}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}f_{p+q}$ avec $p+q\in[\![0,n]\!]$ pour tout $(p,q)\in[\![0,k]\!]\times[\![0,n-k]\!]$ et donc, g_k est une combinaison linéaire des $f_0, f_1, \dots, f_n$, autrement dit, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\boxed{g_k\in V_n}$$

Q25. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, g_k est non nulle et $g_k':x\mapsto i(2k-n)e^{i(2k-n)x}$, soit $\varphi_n(g_k)=i(2k-n)g_k$. Ceci prouve que g_k est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k-n)$.

Comme l'application $k\mapsto i(2k-n)$ est injective, $i(-n), i(2-n), \dots, i(2n-n)$ sont $n+1$ valeurs propres distinctes de φ_n. Or, la dimension de V_n est $n+1$, donc :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable et possède } n+1 \text{ valeurs propres distinctes : les } i(2k-n) \text{ avec } k\in[\![0,n]\!].}$$

Comme $\dim V_n=n+1$ et φ_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes, tous ses sous-espaces propres sont dimension 1. Enfin, comme g_k est un vecteur propre de φ_n, associé à la valeur propre $i(2k-n)$, on a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre associé à la valeur propre } i(2k-n) \text{ est } \ker\left(\varphi_n-i(2k-n)id_{V_n}\right)=\mathrm{Vect}\left(g_k\right).}$$

Q26. Comme V_n est de dimension finie, l'endomorphisme φ_n est un automorphisme si et seulement s'il est injectif, autrement dit quand $\ker\varphi_n=\ker\left(\varphi_n-0id_{V_n}\right)=\{0\}$, c'est-à-dire quand 0 n'est pas valeur propre de φ_n. Or, les valeurs propres de φ_n sont les $i(2k-n)$ quand k décrit $[\![0,n]\!]$, donc 0 est valeur propre de φ_n si et seulement s'il existe $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $i(2k-n)=0$, soit $k=\dfrac{n}{2}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi_n \text{ est un automorphisme si et seulement si } n \text{ est pair.}}$$

Q27. On a vu dans la question **Q23** que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $g_k:x\mapsto(\cos x+i\sin x)^k(\cos x-i\sin x)^{n-k}$, donc pour $k=n$:

$$g_n:x\mapsto(\cos x+i\sin x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^k x\left(i^{n-k}\sin^{n-k}x\right)=\sum_{k=0}^{n}i^{n-k}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x.$$

Soit :

$$\boxed{g_n=\sum_{k=0}^{n}i^{n-k}\binom{n}{k}f_k}$$

Or, pour tout $X=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$, on a :

$$X\in\ker\left(B_n-i\,n\,I_{n+1}\right)\iff\sum_{k=0}^{n}x_kf_k\in\ker\left(\varphi_n-i\,n\,id_{V_n}\right)=\ker\left(\varphi_n-i(2n-n)id_{V_n}\right)=\mathrm{Vect}\left(g_n\right).$$

Et comme $g_n = \sum_{k=0}^{n} q_k f_k$ avec $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker\left(B_n - i\,n\,I_{n+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} x_k f_k \in \mathrm{Vect}\left(\sum_{k=0}^{n} q_k f_k\right) \quad \Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\ker\left(B_n - i\,n\,I_{n+1}\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}}$$

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n+1$

Q28. Multiplier une matrice M à gauche (*resp*. à droite) par une matrice diagonale D revient à multiplier les lignes (*resp*. colonnes) de M par les coefficients diagonaux de D. Ainsi :

$$\boxed{DM = \left(d_{k,k} m_{k,\ell}\right)_{1\le k,\ell\le p} \text{ et } MD = \left(m_{k,\ell} d_{\ell,\ell}\right)_{1\le k,\ell\le p}.}$$

Q29. On a :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & i^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & i^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & i^n \end{pmatrix},\ D_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/i & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1/i^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1/i^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/i^n \end{pmatrix} \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$D_n^{-1}A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1/i & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1/i^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1/i^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1/i^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n/i & 0 & 2/i & \ddots & & \vdots \\ 0 & (n-1)/i^2 & 0 & 3/i^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/i^{n-1} & 0 & n/i^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/i^n & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_n^{-1}A_nD_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n/i & 0 & 2/i & \ddots & & \vdots \\ 0 & (n-1)/i^2 & 0 & 3/i^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/i^{n-1} & 0 & n/i^{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/i^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & i & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & i^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & i^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n/i & 0 & 2i & \ddots & & \vdots \\ 0 & (n-1)/i & 0 & 3i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2/i & 0 & ni \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/i & 0 \end{pmatrix}$$

Et comme $\dfrac{1}{i} = -i$:

$$D_n^{-1}A_nD_n = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -ni & 0 & 2i & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1)i & 0 & 3i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -2i & 0 & ni \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n}$$

D'après ce qui précède A_n et $-iB_n$ sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_{A_n} = \chi_{-iB_n} &= \det\left(X I_{n+1} - (-iB_n)\right) = \det\left(-i^2 X I_{n+1} - (-iB_n)\right) \\ &= \det\left(-i\,(iX I_{n+1} - B_n)\right) = (-i)^{n+1}\det\left(iX I_{n+1} - B_n\right)\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\chi_{A_n}(X) = (-i)^{n+1}\chi_{B_n}(iX)}$$

Q30. On a vu dans la question **Q25** que B_n admet $n+1$ valeurs propres les $i(2k-n)$, pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Avec la question précédente, on a pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\chi_{A_n}(z)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_{B_n}(iz)=0 \quad \Leftrightarrow \quad iz \in \left\{i(2k-n),\, k\in[\![0,n]\!]\right\} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{2k-n,\, k\in[\![0,n]\!]\right\}.$$

Ainsi, $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ possède $n+1$ valeurs propres distinctes (les $2k-n$, pour $k \in [\![0,n]\!]$), donc :

$$\boxed{\text{La matrice } A_n \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \text{ et ses valeurs propres sont les } 2k-n \text{ pour } k\in[\![0,n]\!].}$$

Comme $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$, on a $A_n = -iD_nB_nD_n^{-1}$.Alors, pour $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in \ker\left(A_n - nI_{n+1}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad A_nX = nX \\ &\Leftrightarrow \quad -iD_nB_nD_n^{-1}X = nX \\ &\Leftrightarrow \quad B_n\left(D_n^{-1}X\right) = in\left(D_n^{-1}X\right) \\ &\Leftrightarrow \quad D_n^{-1}X \in \ker\left(B_n - inI_{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $\ker\left(B_n - inI_{n+1}\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ avec $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on obtient :

$$X \in \ker\left(A_n - nI_{n+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad D_n^{-1}X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad X \in \mathrm{Vect}\left(D_n\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi :

$$\ker\left(A_n - nI_{n+1}\right) = \mathrm{Vect}\left(D_n\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right).$$

Enfin, $D_n\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ iq_1 \\ \vdots \\ i^nq_n \end{pmatrix} = i^n\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ avec $i^kq_k = i^ki^{n-k}\binom{n}{k} = i^np_k$ où $p_k = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Donc :

$$\mathrm{Vect}\left(D_n\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(i^n\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\ker\left(A_n - nI_{n+1}\right) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}}$$