Corrigé du DS n° 1

Problème n° 1

PRELIMINAIRES

1) Les fonctions $|f|$ et h sont réelles positives sur $[1,+\infty[$, donc $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ et $x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ sont croissantes sur $[1,+\infty[$. Comme $x \mapsto \int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ que l'on notera L, on a $\int_1^x h(t)dt \leq L$ pour tout $x \in [1,+\infty[$. Comme $|f(x)| \leq h(x)$, on a pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x |f(t)|dt \leq \int_1^x h(t)dt \leq L.$$

Ainsi, $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ est croissante et majorée par L sur $[1,+\infty[$, donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty.}$$

2) On suppose dans un premier temps f réelle et on pose :

$$f_+ : x \mapsto \begin{cases} f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_- : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{quand } f(x) \geq 0 \\ -f(x) = |f(x)| & \text{quand } f(x) < 0 \end{cases}$$

On a pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ et $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$. Comme $x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, les fonctions $x \mapsto \int_1^x |f_+(t)|dt = \int_1^x f_+(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x |f_-(t)|dt = \int_1^x f_-(t)dt$ admettent une limite finie quand $x \to +\infty$.

Or, $f = f_+ + f_-$, donc pour tout $x \in [1,+\infty[$, $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x f_+(t)dt + \int_1^x f_-(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

On suppose maintenant que f est à valeurs complexes. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|\mathrm{Re}(f(x))| \leq |f(x)|$, donc, d'après la question 1, $x \mapsto \int_1^x |\mathrm{Re}(f(t))|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et d'après ce qui précède, $x \mapsto \int_1^x \mathrm{Re}(f(t))\,dt = \mathrm{Re}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

On prouve de même que $x \mapsto \int_1^x \mathrm{Im}(f(t))\,dt = \mathrm{Im}\left[\int_1^x f(t)dt\right]$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et finalement, $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

Ainsi, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Si } x \mapsto \int_1^x |f(t)|dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty, \text{ alors } x \mapsto \int_1^x f(t)dt \text{ aussi.}}$$

3) a. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a, en intégrant par parties (on peut car *f* est de classe C^1) :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) = \left[t\,f(t)\right]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} t\,f\,'(t)dt - f(n)$$

$$= n\,f(n) - (n-1)f(n-1) - \int_{n-1}^{n} t\,f\,'(t)dt - f(n) = (n-1)\left[f(n) - f(n-1)\right] - \int_{n-1}^{n} t\,f\,'(t)dt$$

$$= (n-1)\int_{n-1}^{n} f\,'(t)dt - \int_{n-1}^{n} t\,f\,'(t)dt$$

Soit finalement :

$$\boxed{w_n = \int_{n-1}^{n} (n-1-t)f\,'(t)dt}$$

On a alors :

$$|w_n| = \left|\int_{n-1}^{n} (n-1-t)f\,'(t)dt\right| \leq \int_{n-1}^{n} \left|(n-1-t)f\,'(t)\right| dt = \int_{n-1}^{n} |n-1-t|\left|f\,'(t)\right| dt\,.$$

Or, pour tout $t \in [n-1, n]$, $|n-1-t| = t-(n-1) \leq 1$, donc :

$$\boxed{|w_n| \leq \int_{n-1}^{n} \left|f\,'(t)\right| dt}$$

b. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \left|f\,'(t)\right| dt = \int_{1}^{n} \left|f\,'(t)\right| dt$. Or, $\int_{1}^{x} \left|f\,'(t)\right| dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, donc la série $\sum \int_{n-1}^{n} \left|f\,'(t)\right| dt$ converge et par comparaison, $\sum |w_n|$ converge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ est absolument convergente.}}$$

c. D'après ce qui précède, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Or, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - w_n$, ce qui permet de conclure immédiatement que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. Enfin, $\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_{1}^{n} f(t)dt$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge si et seulement si la suite } \left(\int_{1}^{n} f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

4) a. La fonction *f* est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$f\,'(x) = \frac{1}{x^2}\left(x\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x} - \sin\sqrt{x}\right) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} - \frac{\sin\sqrt{x}}{x^2}\,.$$

Alors, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\left|f\,'(x)\right| \leq \frac{|\cos\sqrt{x}\,|}{2x\sqrt{x}} + \frac{|\sin\sqrt{x}\,|}{x^2} \leq \frac{1}{2x^{3/2}} + \frac{1}{x^2}$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \left(\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) = 2\,.$$

Donc, d'après la question 1 :

$$\boxed{x \mapsto \int_{1}^{x} \left|f\,'(t)\right| dt \text{ admet une limite finie quand } x \to +\infty\,.}$$

b. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, en posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$ (soit $t = u^2$ et $dt = 2u du$), on a :

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\sin\sqrt{t}}{t} dt = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u^2} 2u du = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du .$$

En intégrant par parties, on obtient alors :

$$\int_1^x f(t)dt = 2\left(\left[\frac{-\cos u}{u}\right]_1^{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} -\frac{-\cos u}{u^2} du\right) = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du\right).$$

Ainsi, on a bien, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\boxed{\int_1^x f(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du\right)}$$

c. On a pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du \leq \int_1^{\sqrt{x}} \frac{du}{u^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$, donc, comme plus haut, on peut conclure que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \left|\frac{\cos u}{u^2}\right| du$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

D'après la question 2, il en va de même pour $x \mapsto \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du$ et, comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ admet, elle aussi, une limite finie quand $x \to +\infty$.

Ceci prouve que la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)dt\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Or, d'après la question a, la fonction *f* vérifie les hypothèses de la question 3, ce qui permet de conclure que la série $\sum f(n)$ converge, autrement dit :

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{\sin\sqrt{n}}{n} \text{ converge.}}$$

PARTIE I

5) On a ici $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = S \neq 0$. Comme $v_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{S_n}{n}$, on a :

$$v_n \sim \frac{S}{n}.$$

Or, la série harmonique diverge, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ diverge.}}$$

6) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}$, soit, plus simplement :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{quand } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n+1} & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} u_k = \sum_{k=1}^{p} u_{2k} + \sum_{k=1}^{p} u_{2k-1} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} = 0 .$$

Et :

$$S_{2p+1} = S_{2p} + u_{2p+1} = 0 - \frac{1}{2p+1+1} = -\frac{1}{2(p+1)} .$$

Donc, $\lim\limits_{p \to +\infty} S_{2p} = \lim\limits_{p \to +\infty} S_{2p+1} = 0$, et ainsi :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S = 0 .}$$

D'après ce qui précède :

$$v_n = \frac{S_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{quand } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{n(n+1)} & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Comme $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann converge, la série $\sum\left(-\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ converge et donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

7) On procède comme ci-dessus. On a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} u_{2p} = \dfrac{1}{\ln(p+1)} \\ u_{2p-1} = -\dfrac{1}{\ln(p+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{2p} = 0 \\ S_{2p-1} = -\dfrac{1}{\ln(p+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{2p} = 0 \\ v_{2p-1} = -\dfrac{1}{(2p-1)\ln(p+1)} \end{cases}$$

Alors, $\lim\limits_{p \to +\infty} S_{2p} = \lim\limits_{p \to +\infty} S_{2p-1} = 0$, d'où :

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } S = 0 .}$$

Comme $v_{2p-1} \sim -\dfrac{1}{2p\ln p}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge (par comparaison série-intégrale) :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

8) Dans les deux questions précédentes, on a $S=0$ et une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

$$\boxed{\text{Quand } S=0\text{, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série } \sum v_n.}$$

PARTIE II

9) Si la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, S_n et donc v_n sont de signe constant à partir d'un certain rang (positif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=+\infty$, négatif si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=-\infty$).

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}|S_n|=\lim\limits_{n\to+\infty}|n\,v_n|=+\infty$, donc $\dfrac{1}{n}=o(v_n)$. Comme la série harmonique diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

PARTIE III

10) Ici, $u_n=(-1)^n$. La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=(-1)\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{(-1)^n-1}{2}.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{(-1)^n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}$. La série $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, mais la série harmonique $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

11) Ici, $u_1=-1$ et, pour $n\geq 2$, $u_n=2(-1)^n$.

La suite u ne converge pas vers 0, donc $\sum u_n$ diverge grossièrement. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ avec $n\geq 2$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=-1+2\sum_{k=2}^{n}(-1)^k=-1+2(-1)^2\,\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-(-1)}=(-1)^n.$$

Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie bien les hypothèses de cette partie.}}$$

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

12) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

> Quand la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

Partie IV

13) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1}) \\ &= 2\sin\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $|u_n| \le 2\left|\sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right)\right|$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}\right) = \sin 0 = 0$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

De plus, on a par télescopage, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sin(\sqrt{k}) - \sin(\sqrt{k-1})\right) = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{0}) = \sin(\sqrt{n}).$$

Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n^2} = \sin n$, donc, d'après le résultat rappelé dans l'énoncé, $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

Or, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettait une limite, toute suite extraite aurait la même limite, y compris $(S_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Donc, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ et, d'après la question les préliminaires, la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge, donc :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

14) Comme la suite u est la même que celle de la question précédente en dehors de son premier terme, sa limite est toujours 0. De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 + \sin(\sqrt{n})$, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, et ainsi :

> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie.

On a ici $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{1+\sin(\sqrt{n})}{n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$. Comme $\sum\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge et $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge :

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

15) Dans les deux questions précédentes, une fois $\sum v_n$ converge, une fois elle diverge, donc :

> Quand la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite, on ne peut pas conclure quant à la nature de la série $\sum v_n$.

CONCLUSION

16) Dans les quatre parties précédentes, nous avons passé en revue tous les comportements possibles pour la série $\sum u_n$: convergence, divergence vers l'infini ou absence de limite pour la somme partielle.

En définitive, on peut conclure quant à la nature de $\sum v_n$ uniquement dans le cas où la somme partielle S_n de la suite *u* admet une limite non nulle (finie ou infinie).

Problème n° 2

1) a. Soit $u\in\mathscr{E}$. Par définition, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, il existe un unique $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $u(e_i)=e_j$. Ceci défini une unique application *f* de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f(i)=j$. On a alors immédiatement pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $u(e_i)=e_{f(i)}$.

Ainsi, pour tout $u\in\mathscr{E}$, il existe une unique application $f\in[\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}$ telle que $\varphi(f)=u$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection.}}$$

b. L'ensemble $[\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}$ est fini, de cardinal n^n. Comme $[\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}$ et $\mathscr{E}$ sont en bijection :

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est fini, de cardinal } n^n.}$$

2) a. Soit $u\in\mathscr{E}$. Remarquons déjà que par définition de *u*, on a $\{u(e_1),u(e_2),...,u(e_n)\}\subset\{e_1,e_2,...,e_n\}$.
L'application *u* est un automorphisme de *E* si et seulement si l'image d'une base de *E* par *u* est une base de *E*.

Donc, $u\in GL(E)$ si et seulement si $\left(u(e_1),u(e_2),...,u(e_n)\right)$ est une base de *E*. Et avec l'inclusion donnée ci-dessus, on obtient :

$$u\in GL(E)\ \Leftrightarrow\ \{u(e_1),u(e_2),...,u(e_n)\}=\{e_1,e_2,...,e_n\}.$$

Avec $f=\varphi^{-1}(u)$, on a

$$u\in GL(E)\ \Leftrightarrow\ \left\{e_{f(1)},e_{f(2)},...,e_{f(n)}\right\}=\{e_1,e_2,...,e_n\}\ \Leftrightarrow\ \{f(1),f(2),...,f(n)\}=\{1,2,...,n\}$$

Ainsi, $u\in GL(E)$ si et seulement si $f\left([\![1,n]\!]\right)=[\![1,n]\!]$, autrement *f* est surjective. Comme $[\![1,n]\!]$ est fini, cela revient à *f* bijective, soit, autrement dit, $f=\varphi^{-1}(u)$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{u \in GL(E) \iff \varphi^{-1}(u) \text{ est une permutation de } [\![1,n]\!].}$$

b. On choisit au hasard un élément de $\mathscr{E}$, donc chaque élément est équiprobable. La probabilité p_1 de choisir un automorphisme est alors :

$$p_1 = \frac{\text{nombre d'automrphismes de } \mathscr{E}}{\text{nombre d'éléments de } \mathscr{E}} = \frac{\operatorname{Card}\big(\mathscr{E} \cap GL(E)\big)}{\operatorname{Card}\mathscr{E}}.$$

D'après la question 1.a, $\operatorname{Card}\mathscr{E} = n^n$ et d'après la question 2.a, $\operatorname{Card}\big(\mathscr{E} \cap GL(E)\big)$ est le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$, soit $n!$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité de choisir un automorphisme est } p_1 = \frac{n!}{n^n}.}$$

3) a. Soit $(u_1,u_2) \in \mathscr{E}^2$. Posons $f_1 = \varphi^{-1}(u_1)$ et $f_2 = \varphi^{-1}(u_2)$. On a $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$:

$$u_1 \circ u_2(e_i) = u_1\big(u_2(e_i)\big) = u_1(e_{f_2(i)}) = e_{f_1(f_2(i))} = e_{f_1 \circ f_2(i)}.$$

Or, $f_1 \circ f_2 \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]}$, donc $f_1 \circ f_2 = \varphi^{-1}(u_1 \circ u_2)$ et :

$$\boxed{u_1 \circ u_2 \in \mathscr{E}}$$

Comme la composée de deux automorphismes est un automorphisme, on a immédiatement :

$$(u_1,u_2) \in GL(E)^2 \implies u_1 \circ u_2 \in GL(E).$$

Réciproquement, supposons que $u_1 \circ u_2 \in GL(E)$.

On a alors $\operatorname{Im}(u_1 \circ u_2) = E$. Or, $\operatorname{Im}(u_1 \circ u_2) \subset \operatorname{Im} u_1 \subset E$, donc $\operatorname{Im} u_1 = E$, ce prouve que $u_1 \in GL(E)$ (car E est de dimension finie, donc tout endomorphisme surjectif de E est un automorphisme).

On a alors $u_2 = u_1^{-1} \circ (u_1 \circ u_2)$ et, comme plus haut, la composée de deux automorphismes est toujours un automorphisme, donc $u_2 \in GL(E)$. Ainsi :

$$u_1 \circ u_2 \in GL(E) \implies (u_1,u_2) \in GL(E)^2.$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{u_1 \circ u_2 \in GL(E) \iff (u_1,u_2) \in GL(E)^2.}$$

b. La probabilité p_2 que $u_1 \circ u_2 \in GL(E)$ est alors égale à la probabilité que $(u_1,u_2) \in GL(E)^2$.

On choisit au hasard et simultanément deux éléments distincts de $\mathscr{E}$ (de cardinal n^n) et on veut qu'ils appartiennent tous les deux à $\mathscr{E} \cap GL(E)$ (de cardinal $n!$). Le modèle est celui des combinaisons Et chaque couple obtenu est équiprobable, donc :

$$p_2 = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\binom{n!}{2}}{\binom{n^n}{2}} = \frac{(n!)!(n^n-2)!}{(n^n)!(n!-2)!}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } u_1 \circ u_2 \text{ soit bijectif est } p_2 = \frac{n!(n!-1)}{n^n(n^n-1)}.}$$

4) A l'aide d'une récurrence simple, on peut généraliser la question précédente à k éléments $u_1, \ldots, u_k$ de $\mathscr{E}$, distincts deux à deux, choisis au hasard et simultanément.

On a les résultats suivants :

$$\boxed{u_1 \circ \ldots \circ u_k \in \mathscr{E} \quad \text{et} \quad u_1 \circ \ldots \circ u_k \in GL(E) \Leftrightarrow (u_1, \ldots, u_k) \in GL(E)^k.}$$

De plus, en notant $P_{n,k}$ la probabilité que $u_1 \circ \ldots \circ u_k$ soit bijectif, on a :

$$\boxed{P_{n,k} = \frac{\binom{n!}{k}}{\binom{n^n}{k}} = \frac{(n!)!(n^n-k)!}{(n^n)!(n!-k)!}.}$$

5) On a $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(n/e\right)^n$, donc :

$$(n!)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n!}\left(\frac{n!}{e}\right)^{n!} \qquad (n!-k)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n!-k)}\left(\frac{n!-k}{e}\right)^{n!-k}$$

$$(n^n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n^n}\left(\frac{n^n}{e}\right)^{n^n} \qquad (n^n-k)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(n^n-k)}\left(\frac{n^n-k}{e}\right)^{n^n-k}$$

Et :

$$P_{n,k} = \frac{(n!)!(n^n-k)!}{(n^n)!(n!-k)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n!}\left(\frac{n!}{e}\right)^{n!}\sqrt{2\pi(n^n-k)}\left(\frac{n^n-k}{e}\right)^{n^n-k}}{\sqrt{2\pi(n!-k)}\left(\frac{n!-k}{e}\right)^{n!-k}\sqrt{2\pi n^n}\left(\frac{n^n}{e}\right)^{n^n}} = \frac{\sqrt{1-\frac{k}{n^n}}\left(1-\frac{k}{n^n}\right)^{n^n}}{\sqrt{1-\frac{k}{n!}}\left(1-\frac{k}{n!}\right)^{n!}}\left(\frac{n!-k}{n^n-k}\right)^k$$

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{k}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{1-\frac{k}{n!}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{1-\frac{k}{n^n}}}{\sqrt{1-\frac{k}{n!}}} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(1-\frac{k}{n^n}\right)^{n^n} = \exp\left[n^n \ln\left(1-\frac{k}{n^n}\right)\right] = \exp\left[n^n\left(-\frac{k}{n^n}+o\left(\frac{1}{n^n}\right)\right)\right] = \exp\left(-k+o(1)\right) \to e^{-k} \\ \text{De même, } \left(1-\frac{k}{n!}\right)^{n!} \to e^{-k}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\left(1-\frac{k}{n^n}\right)^{n^n}}{\left(1-\frac{k}{n!}\right)^{n!}} \underset{+\infty}{\sim} 1$$

$$\frac{n!-k}{n^n-k} = \frac{1-\frac{k}{n^n}}{1-\frac{k}{n!}}\frac{n!}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n!}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n!-k}{n^n-k}\right)^k \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)^k$$

Ainsi :

$$\boxed{P_{n,k} \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}\right)^k}$$

Par croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^n} = 0$. Comme k est fixé, ceci donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_{n,k} = 0}$$

Quand n devient très grand, la probabilité de n'obtenir que des bijections en choisissant k applications de $\mathscr{E}$ devient quasi nulle. Ceci n'est pas étonnant car $n! = o(n^n)$ donc, quand n augmente, les bijections se font de plus en plus rares dans $\mathscr{E}$, on a donc de moins en moins de chances d'en obtenir.

6) a. Soit $u \in \mathscr{E}$. On pose $f = \varphi^{-1}(u)$ avec les notations de la question 1. On veut :

$$u \text{ projecteur } \Leftrightarrow \exists\, A \subset [\![1,n]\!],\ A \neq \varnothing,\ \forall\, i \in A,\ u(e_i) = e_i \text{ et } \forall\, i \in [\![1,n]\!] \setminus A,\ u(e_i) = e_j \text{ avec } j \in A.$$

$(\Rightarrow)$ Supposons que u est un projecteur. Alors $u^2 = u$. Posons $A = \{ i \in [\![1,n]\!] \setminus u(e_i) = e_i \}$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $u(e_i) = e_{f(i)}$ et $u(e_{f(i)}) = u^2(e_i) = u(e_i) = e_{f(i)}$, donc $f(i) \in A$.

Ainsi, A est une partie de $[\![1,n]\!]$, non vide (elle contient par exemple $f(1)$) et telle que $\forall\, i \in A$, $u(e_i) = e_i$ (par définition de A) et $\forall\, i \in [\![1,n]\!] \setminus A$, $u(e_i) = e_j = e_{f(i)}$ avec $j = f(i) \in A$ (d'après ce que l'on vient de voir).

L'implication directe est donc vraie.

$(\Leftarrow)$ Supposons qu'il existe une partie A de $[\![1,n]\!]$, non vide, telle que $\forall\, i \in A$, $u(e_i) = e_i$ (donc $i = f(i) \in A$) et $\forall\, i \in [\![1,n]\!] \setminus A$, $u(e_i) = e_j$ avec $j = f(i) \in A$.

Remarquons qu'alors $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $f(i) \in A$, soit $u(e_{f(i)}) = e_{f(i)}$ et, du coup :

$$u^2(e_i) = u\big(u(e_i)\big) = u(e_{f(i)}) = e_{f(i)} = u(e_i).$$

Tous les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ vérifient donc $u^2(e_i) = u(e_i)$. Ceci prouve que $u^2 = u$ et comme u est un endomorphisme de E, u est linéaire, donc c'est un projecteur.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{u \text{ projecteur } \Leftrightarrow \exists\, A \subset [\![1,n]\!],\ A \neq \varnothing,\ \forall\, i \in A,\ u(e_i) = e_i \text{ et } \forall\, i \in [\![1,n]\!] \setminus A,\ u(e_i) = e_j \text{ avec } j \in A.}$$

b. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$rg(u) = rg\big(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)\big) = rg\big(u(e_i), i \in [\![1,n]\!]\big) = rg\Big(u(e_i), i \in A \cup \big([\![1,n]\!] \setminus A\big)\Big).$$

Si on pose $\mathcal{F} = \big(u(e_i), i \in A\big)$, on a $\forall\, i \in [\![1,n]\!] \setminus A$, $u(e_i) = e_j = u(e_j)$ car $j \in A$, donc $u(e_i)$ est un vecteur de la famille $\mathcal{F}$ et on a ainsi :

$$rg(u) = rg\big(\mathcal{F}\big).$$

Or, $\forall i \in A$, $u(e_i) = e_i$, donc $\mathcal{F} = \left(u(e_i), i \in A\right) = \left(e_i, i \in A\right)$. La famille $\mathcal{F}$ est donc une famille extraite de la base $\mathcal{B}$ donc est libre et son rang est égale au nombre de vecteurs qu'elle contient, soit le nombre d'éléments de A. Et ainsi, on a bien :

$$\boxed{rg(u) = \text{Card}\, A}$$

c. On choisit au hasard un élément de $\mathscr{E}$, donc ils sont tous équiprobables et la probabilité recherchée est :

$$p = \frac{\text{nombre de projecteurs de rang } r \text{ de } \mathscr{E}}{\text{nombre d'éléments de } \mathscr{E}} = \frac{\text{nombre de projecteurs de rang } r \text{ de } \mathscr{E}}{\text{Card}\, \mathscr{E}}.$$

D'après ce qui précède, un projecteur de $\mathscr{E}$ est parfaitement défini par la partie A correspondante, et ce projecteur est de rang r si et seulement si $\text{Card}\, A = r$.

Choisir un projecteur de rang r dans $\mathscr{E}$ revient donc à :

1. choisir un r-uplet d'éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ (la partie A) : l'ordre ne compte pas donc il y a $\binom{n}{r}$ possibilités ;
2. pour chaque éléments i de $[\![1,n]\!] \setminus A$, il faut choisir l'image de e_i parmi les r vecteurs de $\left\{e_i, i \in A\right\}$, ces images pouvant se répéter ; on a donc r^{n-r} possibilités pour choisir les $n-r$ images.

Finalement, pour chaque r-uplet possible de l'étape 1, on r^{n-r} possibilités pour choisir les $n-r$ images des vecteurs restants, donc il y a en tout $\binom{n}{r} r^{n-r}$ un projecteur de rang r dans $\mathscr{E}$.

Avec $\text{Card}\, \mathscr{E} = n^n$, on obtient bien :

$$\boxed{p = \binom{n}{r} \frac{r^{n-r}}{n^n}}$$

d. Comme plus haut, la probabilité recherchée est :

$$P = \frac{\text{nombre total de projecteurs de } \mathscr{E}}{\text{nombre d'éléments de } \mathscr{E}}.$$

Comme tout élément de $\mathscr{E}$ est non nul, le rang d'un un projecteur de $\mathscr{E}$ est compris entre 1 (projection sur une droite de E) et n (identité de E). Comme un projecteur à un et un seul rang, le nombre total de projecteurs de $\mathscr{E}$ est $\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} r^{n-r}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un élément de } \mathscr{E} \text{ choisi au hasard soit un projecteur est } P = \frac{1}{n^n} \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} r^{n-r}.}$$

7) Pour $n = 2$, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $2^2 = 4$ et $\mathscr{E}$, et donc $\mathscr{M}$, contiennent 4 éléments. On a :

$$\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La famille $(u)_{u \in \mathscr{E}}$ est génératrice de $\mathcal{L}(E)$ si et seulement si la famille $(M)_{M \in \mathscr{M}}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Or, on a $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, donc :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0_2$$

Ceci implique au la famille $(M)_{M\in\mathscr{M}}$ est liée, donc de rang strictement inférieur à 4. Elle ne peut donc pas engendrer $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4. Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } n=2\text{, la famille } (u)_{u\in\mathscr{E}} \text{ n'est pas génératrice de } \mathcal{L}(E).}$$

8) On a :

$$rg\left((u)_{u\in\mathscr{E}}\right)=rg\left((M)_{M\in\mathscr{M}}\right)=rg\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right).$$

Et, d'après ce qui précède :

$$rg\left((u)_{u\in\mathscr{E}}\right)=rg\left((M)_{M\in\mathscr{M}}\right)=rg\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right).$$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=0_2 \iff \begin{pmatrix}a+b&b\\c&a+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}a+b=0\\b=c=0\\a+c=0\end{cases} \iff a=b=c=0.$$

Ainsi, la famille est libre, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{rg\left((u)_{u\in\mathscr{E}}\right)=3}$$

9) On a :

$$\begin{aligned}\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)&=\text{Vect}\left(E_{1,1},\,E_{1,1}+E_{2,2},\,E_{1,1}+E_{1,2},\,E_{2,1}+E_{2,2}\right)\\&=\text{Vect}\left(E_{1,1},\,E_{2,2},\,E_{1,2},\,E_{2,1}+E_{2,2}\right)\\&=\text{Vect}\left(E_{1,1},\,E_{2,2},\,E_{1,2},\,E_{2,1}\right)\\&=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de 4 matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension 4, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Or, d'après la question précédente, $H=\text{Vect}\left((M)_{M\in\mathscr{M}}\right)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$.

Comme $D=\text{Vect}\left(E_{1,1}\right)=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)$, on a bien :

$$\boxed{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=D\oplus H}$$

10) On vient de prouver que :

$$\boxed{\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)\text{ est bien une base de }\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,.}$$

11) Pour obtenir la matrice $P=P_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}}$, matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$, il faut déterminer les coordonnées dans vecteurs de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}_c$. On a immédiatement :

$$\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)=\left(E_{1,1},\,E_{1,1}+E_{2,2},\,E_{1,1}+E_{1,2},\,E_{2,1}+E_{2,2}\right).$$

Donc :

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}}$$

Pour obtenir la matrice $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}$, matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_c$, deux méthodes sont possibles : soit on détermine les coordonnées dans vecteurs de $\mathscr{B}_c$ dans $\mathscr{B}$, soit on utilise le fait que $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c}=P^{-1}$. Utilisons la seconde méthode.

Pour calculer P^{-1} on échelonne et réduit P par opérations élémentaires sur les lignes et on effectue les mêmes opérations en partant de la matrice I_4 :

$$\begin{array}{rc|c}
 & \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\\
\xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_4]{} & \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\\
\xrightarrow[L_3\leftrightarrow L_4]{} & \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\
\xrightarrow[\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_4}]{} & \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\\
\xrightarrow[L_1\leftarrow L_1-L_2]{} & \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\0&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}
\end{array}$$

On obtient :

$$\boxed{P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}_c} = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

12) Décomposons $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{-2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in H}.$$

Donc, la projection de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sur *H*, parallèlement à *D* est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{L'image de } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ par la projection sur } H\text{, parallèlement à } D \text{ est } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.}$$