

**Corrigés des TD du chapitre 2**
**Exercice 1**

1) On a  $\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq a$ , soit  $\|y-x\| \leq a\|x\|$ . En écrivant  $x = x-y+y$ , on obtient :

$$\|y-x\| \leq a\|x-y+y\| \leq a\|x-y\| + a\|y\| \Rightarrow (1-a)\|y-x\| \leq a\|y\|.$$

Et comme  $a \in [0,1[$ , on a  $1-a > 0$ , donc, avec aussi  $\|y\| > 0$  :

$$\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}$$

2) Remarquons que dans la formule désirée,  $x$  et  $y$  jouent le même rôle, donc quitte à intervertir les deux vecteurs, on peut supposer que  $0 < \|x\| \leq \|y\|$  (donc  $\max(\|x\|, \|y\|) = \|y\|$ ).

Posons alors  $k = \frac{\|x\|}{\|y\|}$  (on a donc  $0 < k \leq 1$ ),  $u = \frac{x}{\|x\|}$  et  $v = \frac{y}{\|y\|}$  (on a donc  $\|u\| = \|v\| = 1$ ).

Le résultat voulu se réécrit alors :  $\|u-v\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\|y\|} = 2\|ku-v\|$ . On a :

$$\|u-v\| = \|u-ku+ku-v\| \leq \|u-ku\| + \|ku-v\| = \|(1-k)u\| + \|ku-v\|.$$

Et comme  $\|u\| = 1$  et  $1-k \geq 0$ , on a :

$$\|u-v\| \leq 1-k + \|ku-v\|.$$

Enfin, d'après l'« autre » inégalité triangulaire :  $|\|ku\| - \|v\|| \leq \|ku-v\|$ . Avec  $\|u\| = \|v\| = 1$ , on obtient :

$$1-k = |k-1| \leq \|ku-v\|.$$

Finalement, on obtient :

$$\|u-v\| \leq 1-k + \|ku-v\| \leq 2\|ku-v\|.$$

Soit :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}$$

**Exercice 2**

Les preuves que  $N_1$ ,  $N_\infty$  et  $N$  sont des normes sur  $E$  se font exactement comme celles faites dans le cours pour les deux premières normes usuelles sur  $\mathbb{K}^p$  (le fait que le nombre  $n+1$  de composantes varie ne change pas la preuve) et pour la norme infinie sur  $C([a,b], \mathbb{R})$  avec  $[a,b] = [0,1]$  (en remarquant que les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$  et que si un polynôme s'annule en tout point de  $[0,1]$ , alors il admet une infinité de racines, donc il est nul).

Soit  $P = X^n + \dots + X + 1$ . On a  $N_\infty(P) = 1$  et  $N_1(P) = N(P) = n + 1$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(P)}{N_\infty(P)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(P)}{N_\infty(P)} = +\infty.$$

Ainsi, il n'existe pas de réel  $a > 0$  tel que  $N_1 \leq aN_\infty$  ou  $N \leq aN_\infty$ , et donc :

$N_\infty$  n'est équivalente ni à  $N_\infty$ , ni à  $N$ .

Soit maintenant  $P = (1 - X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^k$ . On a  $N_1(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  et  $N(P) = 1$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(P)}{N(P)} = +\infty.$$

Ainsi, il n'existe pas de réel  $a > 0$  tel que  $N_1 \leq aN$  :

$N_1$  et  $N$  ne sont pas équivalentes.

### Exercice 3

On a vu dans le cours que si  $u$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}^p$  dans  $E$ , alors  $x \mapsto \|u(x)\|$  est une norme sur  $\mathbb{K}^p$  et dans la preuve, l'aspect bijectif n'est utilisé que pour prouver la séparation.

On prouve donc exactement comme dans le cours que  $N : x \mapsto \|u(x)\|$  est une application de  $F$  dans  $\mathbb{R}_+$  vérifiant la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. De plus, pour tout  $x \in F$ , on a :

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0.$$

Et pour que  $u(x) = 0$  soit équivalent à  $x = 0$ , il est nécessaire et suffisant que  $u$  soit injective.

Ainsi :

L'application  $N : x \mapsto \|u(x)\|$  est une norme sur  $F$  si et seulement si  $u$  est injective.

### Exercice 4

On a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - t - 2) = +\infty$ , donc pour tout réel  $k$  assez grand,  $e^k - k - 2$  est positif. La fonction constante  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto k$  appartient alors à  $A$  et a pour norme  $\|f\|_\infty = k$ .

Ainsi, on peut trouver  $f \in A$  de norme aussi grande que l'on veut, ce qui veut dire que :

$A$  n'est pas bornée.

Soit maintenant  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $A$  convergeant vers  $f \in E$ . On a donc  $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ .

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Donc, pour  $x \in [0, 1]$  fixé,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ .

De plus, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in A$ , on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0,1]$ ,  $2 + f_n(x) \leq e^{f_n(x)}$  et en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient pour tout  $x \in [0,1]$  :  $2 + f(x) \leq e^{f(x)}$  et ainsi,  $f \in A$ .

Ceci prouve que :

$A$  est fermée.

Finalement :

$A$  est une partie fermée et non bornée de  $E$ .

### Exercice 5

1) On a  $A \subset \bar{A}$  donc  $E \setminus \bar{A} \subset E \setminus A$  et, comme,  $\bar{A}$  est fermé,  $E \setminus \bar{A}$  est un ouvert inclus dans  $E \setminus A$ .

Soit un ouvert  $O$  inclus dans  $E \setminus A$ . On a  $O \subset E \setminus A$ , donc :  $E \setminus (E \setminus A) = A \subset E \setminus O$ .

Or,  $E \setminus O$  est fermé, c'est donc un fermé contenant  $A$ . Comme  $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ , on a  $\bar{A} \subset E \setminus O$  et donc :  $O \subset E \setminus \bar{A}$ . Ainsi, tout ouvert  $O$  inclus dans  $E \setminus A$  est inclus dans  $E \setminus \bar{A}$ .

Finalement,  $E \setminus \bar{A}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $E \setminus A$ , soit :

$$E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$$

Si on remplace  $A$  par  $E \setminus A$  dans la relation ci-dessus, on obtient :  $E \setminus \overline{E \setminus A} = \overset{\circ}{E \setminus (E \setminus A)} = \overset{\circ}{A}$ .

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$$

2) Pour tout  $a \in \bar{A}$ , il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $a$ . Or, les éléments de  $A$  sont dans  $B$ , donc il existe une suite d'éléments de  $B$  qui converge vers  $a$ . Ceci prouve que  $a \in \bar{B}$  et ainsi :

$$\bar{A} \subset \bar{B}$$

Si  $A \subset B$ , alors  $E \setminus B \subset E \setminus A$ , et d'après ce qui précède :  $\overline{E \setminus B} \subset \overline{E \setminus A}$ .

D'après la question précédente :  $\overset{\circ}{E \setminus B} \subset \overset{\circ}{E \setminus A}$ .

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

3) On a  $A \cap B \subset A$ , donc d'après le résultat ci-dessus :  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$ . De même,  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$  et donc :

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

Soit maintenant  $a \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ . Il existe alors  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $B(a, r_1) \subset A$  et  $B(a, r_2) \subset B$ .

En posant  $r = \min(r_1, r_2) > 0$ , on a  $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset A$  et  $B(a, r) \subset B(a, r_2) \subset B$ , donc  $B(a, r) \subset A \cap B$ .

Ceci prouve que  $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$  et ceci étant vrai pour tout  $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$ , on a :

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}.$$

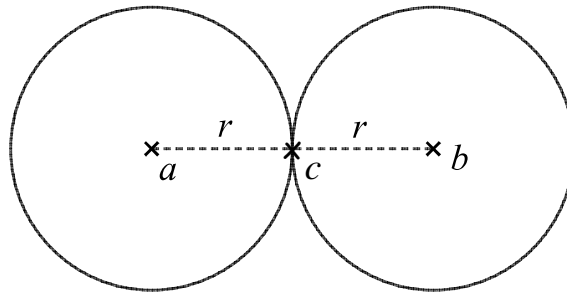
Finalement, on bien :

$$\boxed{\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A \cap B}}$$

4) On a  $A \cap B \subset A$ , donc d'après la question 2 :  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ . De même,  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$  et ainsi :

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Soit  $a, b \in E$  tels que  $a \neq b$ . Posons  $r = \frac{\|a-b\|}{2}$ ,  $A = B(a, r)$  et  $B = B(b, r)$ .



On a  $A \cap B = \emptyset$  (si  $x \in A \cap B$ , on a  $2r = \|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < r+r = 2r$  : absurde), donc  $\overline{A \cap B} = \emptyset$ , mais  $\overline{A \cap B} = \overline{B}(a, r) \cap \overline{B}(b, r) = \{c\}$  avec  $c = \frac{1}{2}(a+b)$ , donc :

L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

### Exercice 6

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\overline{C}$  et un réel  $\lambda \in [0, 1]$ .

Il existe deux suites de  $C$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$  et  $b$  respectivement.

Comme  $C$  est convexe,  $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n) = \lambda a + (1-\lambda)b \in \overline{C}.$$

Ainsi :

$\overline{C}$  est convexe.

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\overset{\circ}{C}$  (donc de  $C$  aussi).

Comme  $a$  et  $b$  sont intérieurs à  $C$ , il existe deux réels  $r_1 > 0$  et  $r_2 > 0$  tels que  $B(a, r_1) \subset C$  et  $B(b, r_2) \subset C$ .

En posant  $r = \min(r_1, r_2) > 0$ , on a  $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset C$  et  $B(b, r) \subset B(b, r_2) \subset C$ .

Soit maintenant  $t \in [0,1]$  et  $c = ta + (1-t)b$ . Posons :

$$A = \{tx + (1-t)y, (x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)\}.$$

Pour tout  $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)$ , on a  $(x, y) \in C^2$ , donc  $tx + (1-t)y \in C$  (car  $C$  est convexe). Ainsi :

$$\underline{A \subset C}.$$

Prouvons que  $A = B(c, r)$ .

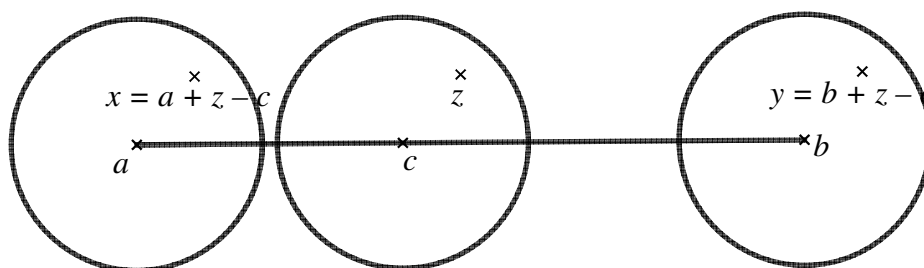
Soit  $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)$ . On a  $\|x - a\| < r$ ,  $\|y - b\| < r$  et :

$$\|tx + (1-t)y - c\| = \|t(x - a) + (1-t)(y - b)\| \leq t\|x - a\| + (1-t)\|y - b\| < tr + (1-t)r = r.$$

Donc,  $tx + (1-t)y \in B(c, r)$  et ainsi :  $\underline{A \subset B(c, r)}$ .

Soit maintenant  $z \in B(c, r)$ .

On considère les vecteurs  $x = a + z - c$  et  $y = b + z - c$  comme sur le schéma ci-dessous :



On a :

$$\left. \begin{array}{l} \|x - a\| = \|a + z - c - a\| = \|z - c\| < r \Rightarrow x \in B(a, r) \\ \|y - b\| = \|b + z - c - b\| = \|z - c\| < r \Rightarrow y \in B(b, r) \end{array} \right\} \Rightarrow tx + (1-t)y \in A.$$

Or :

$$tx + (1-t)y = t(a + z - c) + (1-t)(b + z - c) = ta + (1-t)b + t(z - c) + (1-t)(z - c) = c + z - c = z.$$

Donc,  $z \in A$  et ainsi :  $\underline{B(c, r) \subset A}$ .

Finalement, on a bien :

$$\underline{A = B(c, r)}.$$

En résumé, on vient de prouver que pour tout  $t \in [0,1]$ , il existe un réel  $r > 0$  tel que  $B(ta + (1-t)b, r) \subset C$ , autrement dit, pour tout  $t \in [0,1]$ ,  $ta + (1-t)b \in \overset{\circ}{C}$ .

Donc, pour tous  $a, b \in \overset{\circ}{C}$ ,  $[a, b] \subset \overset{\circ}{C}$ , ce qui prouve que :

$\overset{\circ}{C}$  est convexe.

**Exercice 7**

1) Comme on a bien lu l'énoncé jusqu'au bout, on a repéré la question 7.a. que l'on résout maintenant.

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ .

Si on pose  $AB = (c_{i,j})$ , on a  $\|AB\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |c_{i,j}|$  et pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

$$|c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

Donc :

$$\|AB\|_\infty \leq n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

Si on pose maintenant pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\| = n \cdot \|A\|_\infty$ ,  $A \mapsto \|A\|$  est une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  car  $A \mapsto \|A\|$  en est une et  $n > 0$ . On a de plus, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$$\|AB\| = n \cdot \|AB\|_\infty \leq n(n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty) = (n \cdot \|A\|_\infty)(n \cdot \|B\|_\infty) = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Ainsi :

Il existe bien une norme  $\|\cdot\|$  de  $E$  telle que pour toutes  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

2) Soit  $A \in E$ . Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

Or, si  $\|A\| < 1$ , on a  $\|A\|^k \rightarrow 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes,  $\|A^k\| \rightarrow 0$  et ainsi :

$$\|A\| < 1 \Rightarrow A^k \rightarrow 0_n$$

Posons  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ .

On a  $\|A\|_\infty = \|B\|_\infty = 2$ , donc  $\|A\| = \|B\| = 4$  et :

- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = 2^k I_2$  donc  $\|A^k\| \rightarrow +\infty$  et la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  n'admet pas de limite ;
- $B^2 = \frac{1}{2} I_2$  donc, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^{2k} = \frac{1}{2^k} I_2$  et  $B^{2k+1} = \frac{1}{2^k} B$ . On a alors  $\|B^k\| \rightarrow 0$ , donc  $B^k \rightarrow 0_n$ .

Ainsi :

Si  $\|A\| \geq 1$ , on ne peut pas conclure quant à la limite de  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

3) Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $S_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ), avec pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k = (a_{k,i,j})$ , qui converge vers  $A = (a_{i,j})$ . Comme  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie, on a convergence coefficient par coefficient, donc pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{k,i,j} \rightarrow a_{i,j}$  et  $a_{k,j,i} \rightarrow a_{j,i}$ . Or,  $a_{k,j,i} = a_{k,i,j}$  (resp.  $a_{k,j,i} = -a_{k,i,j}$ ), donc en passant à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient  $a_{j,i} = a_{i,j}$  (resp.  $a_{j,i} = -a_{i,j}$ ) et ceci, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Ainsi,  $A$  est symétrique (resp.  $A$  est antisymétrique), donc :

$S_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont fermés dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telle que  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

D'une part,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  est fermé donc :

$$M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part,  ${}^t(A^2) = ({}^tA)^2 = (-A)^2 = A^2$ , donc  $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^{2k} \in S_n(\mathbb{R})$  et  $A^{2k} \rightarrow M$ , donc, comme  $S_n(\mathbb{R})$  est fermé :

$$M \in S_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi,  $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$ , soit  $M = 0_n$  et finalement :

Si  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , la seule limite possible de la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est  $0_n$ .

4) On a  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0\}$ . On a alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \leq 0\}.$$

Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  convergeant vers  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k = (a_{k,i,j})$  et  $A = (a_{i,j})$ . On a :

$$A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,i,j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme les matrices  $A_k$  possèdent toutes  $n^2$  coefficients, il existe  $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et une suite extraite  $(A_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_{\varphi(k), i_0, j_0} \leq 0$  et :

$$a_{i_0, j_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k, i_0, j_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{\varphi(k), i_0, j_0} \leq 0.$$

Ainsi, il existe  $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $a_{i_0, j_0} \leq 0$  et donc  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

Ceci prouve que  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est fermé, donc que :

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $E$ .

5) La trace est une forme linéaire sur  $E$ , donc l'ensemble des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un hyperplan  $H$  de  $E$ . Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $H$  convergeant vers  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k = (a_{k,i,j})$  et  $A = (a_{i,j})$ . On a :

$$A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,i,j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \in H$ , on a  $\sum_{i=1}^n a_{k,i,i} = 0$  et en passant à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n a_{k,i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0.$$

Donc,  $A \in H$  et  $H$  est fermé.

Soit  $M$  une éventuelle matrice de l'intérieur de  $H$ . Il existe alors une boule ouverte  $B$  de centre  $M$  et de rayon  $r$  incluse dans  $H$ . Alors, si on pose  $N = M + \frac{r}{2\|E_{1,1}\|} E_{1,1}$  où  $E_{1,1}$  est la première matrice de la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\|N - M\| = \frac{r}{2} < r$ , donc  $N \in B \subset H$ .

Or,  $H$  est un sous-espace de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , donc si  $N$  et  $M$  sont dans  $H$ , alors  $E_{1,1} = \frac{2\|E_{1,1}\|}{r}(N - M) \in H$ . Ceci est absurde car  $\text{Tr}(E_{1,1}) = 1 \neq 0$  donc  $E_{1,1} \notin H$ . Ainsi, l'existence d'un élément de l'intérieur de  $H$  mène à une absurdité, donc  $H$  est d'intérieur vide et, finalement :

L'ensemble des matrices de trace nulle de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est fermé, d'intérieur vide.

6) En remplaçant  $a_{i,j} \leq 0$  par  $0 \leq a_{i,j} \leq 1$ , on démontre exactement comme dans la question 4 que  $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  est une partie fermée de  $E$ .

De plus, pour tout  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A\|_\infty$  est l'un des coefficients de  $A$ , donc  $\|A\|_\infty \in [0, 1]$  et ainsi,  $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  est une partie bornée de  $E$ .

Enfin, soient  $A, B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  avec  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$ , et  $\lambda \in [0, 1]$ .

On a  $\lambda \geq 0$  et  $1 - \lambda \geq 0$ , donc, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

$$\begin{cases} 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ 0 \leq b_{i,j} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda \\ 0 \leq (1 - \lambda) b_{i,j} \leq 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \lambda a_{i,j} + (1 - \lambda) b_{i,j} \leq 1.$$

Les  $\lambda a_{i,j} + (1 - \lambda) b_{i,j}$  étant les coefficients de  $\lambda A + (1 - \lambda) B$ , on a  $\lambda A + (1 - \lambda) B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  et donc,  $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  est une partie convexe de  $E$ . Finalement :

$\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$  est une partie convexe, fermée et bornée de  $E$ .

7) a. On l'a fait plus haut.

b. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k$ .

On pose pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = (a_{k,i,j})$ . On a alors pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |a_{k,i,j}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k \Rightarrow \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} |a_{k,i,j}| \leq |a_{0,i,j}| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k.$$

Or,  $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \frac{(n \cdot \|A\|_\infty)^k}{k!}$  et la série exponentielle  $\sum \frac{(n \cdot \|A\|_\infty)^k}{k!}$  converge. La série  $\sum \frac{1}{k!} a_{k,i,j}$  est alors absolument convergente, donc convergente.

Comme pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A_p = \left( \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  et toutes les suites  $\left( \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{p \in \mathbb{N}}$  convergent :

La suite  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  converge.



c. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

En posant  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on a  $A = aI_2 + N$ , avec  $N^2 = 0_2$  donc  $N^k = 0_2$  pour tout entier  $k \geq 2$ .

Comme  $I_2$  et  $N$  commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, soit pour tout entier  $p \geq 2$  :

$$A^p = (aI_2 + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (aI_2)^{p-k} N^k = \binom{p}{0} (aI_2)^p + \binom{p}{1} (aI_2)^{p-1} N = a^p I_2 + pa^{p-1} N.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour  $p = 0$  (en prenant ici  $a^0 = 1$  même quand  $a = 0$ ) et  $p = 1$ .

Alors, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (a^k I_2 + ka^{k-1} N) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a^k I_2 + \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} ka^{k-1} N \\ &= \left( \sum_{k=0}^p \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left( \sum_{k=1}^p \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right) N = \left( \sum_{k=0}^p \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left( \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!} \right) N \end{aligned}$$

Et donc :

$$\exp(A) = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) N = e^a (I_2 + N).$$

Soit :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}}$$

Soit  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  avec  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . On a alors pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p = \text{diag}(a_1^p, \dots, a_n^p)$  et :

$$A_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \text{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k) = \text{diag} \left( \sum_{k=0}^p \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^p \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Donc :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Soit :

$$\boxed{A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exp(A) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})}$$

### Exercice 8

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $(u_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  les suites définies par :

$$u_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases} \quad \text{et} \quad u_k = \frac{1}{k+1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u^{(n)} \in F$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, |u_k^{(n)} - u_k| = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq n \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } k > n \end{cases} \Rightarrow \|u^{(n)} - u\|_\infty = \frac{1}{n+2}.$$

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^{(n)} - u\|_\infty = 0$ , donc  $u^{(n)} \rightarrow u$ . Comme  $u \notin F$ , on en conclut que :

$F$  n'est pas fermé.

Comme  $F$  est l'ensemble des suites des suites réelles bornées nulles à partir d'un certain rang,  $E \setminus F$  est l'ensemble des suites des suites réelles bornées possédant un terme non nul de rang plus grand que tout entier aussi grand que l'on veut :  $\forall u \in E \setminus F, \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, N \geq n, u_N \neq 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $(v_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $v_k^{(n)} = \frac{1}{(n+1)(k+1)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v^{(n)} \in E \setminus F$  ( $v^{(n)}$  est bornée et ne possède aucun terme nul) et  $\|v^{(n)}\|_\infty = \frac{1}{n+1}$ .

On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v^{(n)}\|_\infty = 0$ , ce qui prouve que la suite (de suites)  $(v^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la suite nulle, qui appartient à  $F$ , donc pas à  $E \setminus F$ . Ainsi,  $E \setminus F$  n'est pas fermé, donc :

$F$  n'est pas ouvert.

### Exercice 9

1) Soit  $f \in E$  telle que  $N_\infty(f) = 1$ . Alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a  $-1 \leq f(t) \leq 1$  (et 1 ou  $-1$  est atteint car ici  $f$  est continue sur un segment, donc  $|f|$  aussi et  $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f| = \max_{[0,1]} |f|$ ).

Ainsi, pour tout  $f \in A$  :

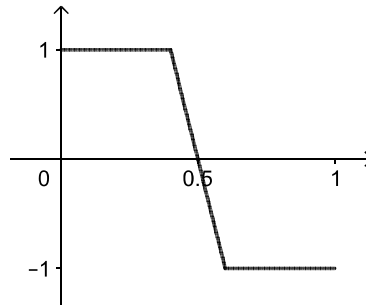
$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} f(t) dt \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \int_{1/2}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \leq \varphi(f) \leq 1 \Rightarrow |\varphi(f)| \leq 1.$$

Ainsi,  $\sup_{f \in A} |\varphi(f)|$  existe et  $\sup_{f \in A} |\varphi(f)| \leq 1$ .

Remarquons que pour  $f \in E$ ,  $\varphi(f)$  est d'autant plus grand que  $\int_0^{1/2} f(t) dt$  est grand et positif et  $\int_{1/2}^1 f(t) dt$  est grand et négatif. Ceci nous incite à considérer la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right] \\ -2nt + n & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right] \\ -1 & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente  $f_5$  :



On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n \in A$  et :

$$\begin{aligned} \varphi(f_n) &= \int_0^{1/2} f_n(t) dt - \int_{1/2}^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}} f_n(t) dt + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} f_n(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} f_n(t) dt - \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}^1 f_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \left[ -nt^2 + nt \right]_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2}} - \left[ -nt^2 + nt \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(f_n)| = 1$ , ce qui prouve que :

$$\boxed{\sup_{f \in A} |\varphi(f)| = 1}$$

Supposons qu'il existe  $f \in A$  telle que  $|\varphi(f)| = 1$ .

En remarquant que  $-f \in A$  et  $\varphi(-f) = -\varphi(f)$ , on peut supposer (quitte à changer  $f$  en  $-f$ ) que  $\varphi(f) = 1$ .

On a vu que :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{1/2} f(t) dt &\leq \frac{1}{2} \\ -\int_{1/2}^1 f(t) dt &\leq \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(f) \leq 1.$$

Et, si l'une des deux inégalités de gauche est stricte, alors  $\varphi(f) < 1$ , donc :

$$\int_0^{1/2} f(t) dt = -\int_{1/2}^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$\int_0^{1/2} f(t) dt = \frac{1}{2} = \int_0^{1/2} dt \Rightarrow \int_0^{1/2} [1 - f(t)] dt = 0.$$

Or,  $1 - f$  est continue et positive sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  (car 1 majore  $f$ ), donc  $1 - f = 0$  sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  et  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ .

De même,  $\int_{1/2}^1 [1 + f(t)] dt = 0$  avec  $1 + f$  est continue et positive sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , donc  $1 + f = 0$  sur  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  et

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ , ce qui contredit le résultat précédent. Donc, l'existence de  $f \in A$  telle que  $|\varphi(f)| = 1$  entraîne une

absurdité, ce qui permet de conclure que pour tout  $f \in A$ ,  $|\varphi(f)| < 1$  et ainsi :

$$\boxed{\sup_{f \in A} |\varphi(f)| \text{ n'est pas un maximum.}}$$

2) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $F$  convergeant vers  $f \in E$  (pour la norme infinie), soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} N_\infty(f_n - f) = 0.$$

On veut montrer que  $f \in F$ , autrement dit que  $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt = 1$ .

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(f_n) = \int_0^{1/2} f_n(t) dt - \int_{1/2}^1 f_n(t) dt = 1$  et :

$$\begin{aligned} |\varphi(f) - 1| &= |\varphi(f) - \varphi(f_n)| \\ &= \left| \left( \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt \right) - \left( \int_0^{1/2} f_n(t) dt - \int_{1/2}^1 f_n(t) dt \right) \right| \\ &= \left| \left( \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_0^{1/2} f_n(t) dt \right) - \left( \int_{1/2}^1 f(t) dt - \int_{1/2}^1 f_n(t) dt \right) \right| \\ &= \left| \int_0^{1/2} [f(t) - f_n(t)] dt - \int_{1/2}^1 [f(t) - f_n(t)] dt \right| \end{aligned}$$

Donc :

$$|\varphi(f) - 1| \leq \left| \int_0^{1/2} [f(t) - f_n(t)] dt \right| + \left| \int_{1/2}^1 [f(t) - f_n(t)] dt \right| \leq \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)| dt + \int_{1/2}^1 |f(t) - f_n(t)| dt.$$

Et :

$$\int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)| dt + \int_{1/2}^1 |f(t) - f_n(t)| dt = \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_0^1 N_\infty(f_n - f) dt = N_\infty(f_n - f).$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi(f) - 1| \leq N_\infty(f_n - f)$  et en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient  $|\varphi(f) - 1| \leq 0$ , soit  $\varphi(f) = 1$  et donc  $f \in F$ . Ceci prouve que :

$F$  est fermé.

La distance de la fonction nulle à  $F$  est  $\inf_{f \in F} N_\infty(0 - f) = \inf_{f \in E, \varphi(f)=1} N_\infty(f)$ .

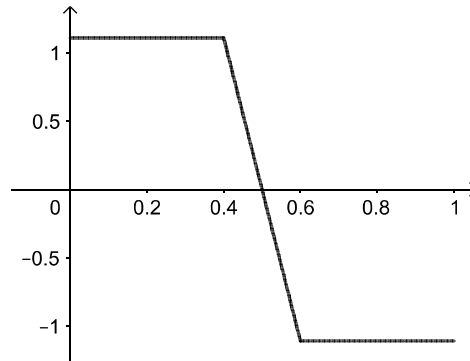
On prouve comme ci-dessus que pour tout  $f \in E$ ,  $|\varphi(f)| \leq N_\infty(f)$ , donc pour tout  $f \in F$ ,  $1 \leq N_\infty(f)$  et :

$$\inf_{f \in E, \varphi(f)=1} N_\infty(f) \geq 1.$$

Introduisons la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2n-1} & \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right] \\ -\frac{2n^2}{2n-1}(2t-1) & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right] \\ -1 - \frac{1}{2n-1} & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1\right] \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente  $f_5$  :



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n \in E$  et :

$$\int_0^{1/2} f_n(t) dt = - \int_{1/2}^1 f_n(t) dt = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right) \times \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\right] = \frac{1}{2}.$$

Donc,  $\varphi(f_n) = 1$  et  $f_n \in F$ .

De plus,  $N_\infty(f_n) = 1 + \frac{1}{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Avec  $\inf_{f \in E, \varphi(f)=1} N_\infty(f) \geq 1$ , ceci prouve que  $\inf_{f \in E, \varphi(f)=1} N_\infty(f) = 1$  et ainsi :

La distance de la fonction nulle à  $F$  est 1.