Corrigés des TD du chapitre 3

Exercice 1

Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \left\| \dfrac{1}{1+\|x\|} x \right\| = \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B(0,1)$ et ainsi, *f* est à images dans $B(0,1)$.

Par ailleurs, l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur *E* et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \mapsto \dfrac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur *E* en tant que composée d'applications continues.

Enfin, $x \mapsto x$ est continue sur *E*, donc *f* est continue sur *E* en tant que produit de fonctions continues (l'une scalaire, l'autre vectorielle).

Soit $y \in B(0,1)$. On a :

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+\|x\|} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} = \|y\| < 1 \\ x = \left(1+\|x\|\right) y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \|x\| = \dfrac{\|y\|}{1-\|y\|} \\ x = \left(1+\|x\|\right) y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{1-\|y\|} y$$

Ceci prouve que *f* est bijective de réciproque $y \mapsto \dfrac{1}{1-\|y\|} y$, définie sur $B(0,1)$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$, donc on prouve comme plus haut que $y \mapsto \dfrac{1}{1-\|y\|} y$ est continue sur $B(0,1)$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est continue sur } E, \text{ bijective de } E \text{ dans } B(0,1) \text{ et } f^{-1} \text{ est continue sur } B(0,1).}$$

Exercice 2

L'application ϕ est linéaire (par linéarité de l'intégrale). Soient $f, g \in E$. On a :

$$\left|\phi(f) - \phi(g)\right| = \left|\phi(f-g)\right| = \left|\int_0^1 \left(f(t) - g(t)\right) dt\right| \leq \int_0^1 \left|f(t) - g(t)\right| dt = \|f-g\|.$$

Donc, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\left|\phi(f) - \phi(g)\right| \leq \|f-g\|$, autrement dit, ϕ est 1- lipschitzienne, donc :

$$\boxed{\phi \text{ est continue sur } E.}$$

Exercice 3

1) Les fonctions $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x,y) \mapsto x^2$ sont polynomiales en *x* et *y*, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, et à images dans $\mathbb{R}_+$. De plus, $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$, donc $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue et strictement positive sur Ω.

Comme la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, *f* est continue sur Ω en tant que composée de fonctions continues et *g* est continue sur Ω en tant que quotient de telles fonctions.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont continues sur } \Omega.}$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $f\left((x,0)\right) = \ln(x^2)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f\left((x,0)\right) = +\infty$. Ainsi, *f* n'admet pas de limite quand en $(0,0)$ et :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } (0,0).}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $g\left((x,0)\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g\left((x,0)\right) = 1$ et pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, on a $g\left((0,y)\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g\left((0,y)\right) = 0 \neq 1$. Ainsi, *g* n'admet pas de limite quand en $(0,0)$ et :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } (0,0).}$$

Exercice 4

1) Supposons qu'il existe $(a,b) \in F^2$ tel que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Comme *f* est λ-lipschitzienne pour la norme infinie, on a : $\|f(a) - f(b)\|_\infty \leq \lambda \|a-b\|_\infty$, soit :

$$\|a-b\|_\infty \leq \lambda \|a-b\|_\infty.$$

Or, si $\|a-b\|_\infty \neq 0$, on obtient $1 \leq \lambda$, ce qui est absurde car $\lambda \in \,]0,1[$, donc $\|a-b\|_\infty = 0$, soit $a = b$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ possède un point fixe alors il est unique.}}$$

2) Prouvons les deux résultats par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, on a $x_0 \in F$ par hypothèse et $\|x_1 - x_0\|_\infty = \lambda^0 \|x_1 - x_0\|_\infty$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

- $x_n \in F \;\Rightarrow\; f(x_n) \in F$ (car $f(F) \subset F$) $\;\Rightarrow\; x_{n+1} \in F$.
- On a $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$ et :

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\|_\infty = \|f(x_{n+1}) - f(x_n)\|_\infty \leq \lambda \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda\left(\lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty\right) = \lambda^{n+1} \|x_1 - x_0\|_\infty.$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{x_n \in F \text{ et } \|x_{n+1} - x_n\|_\infty \leq \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty.}$$

3) Soit $i \in [\![1\,;p]\!]$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|x_{i,n+1} - x_{i,n}\right| \leq \left\|x_{n+1} - x_n\right\|_\infty \leq \lambda^n \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty .$$

Or, $\lambda \in \,]0,1[$, donc la série géométrique $\sum \lambda^n \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty$ est convergente et par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum\left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right) \text{ est absolument convergente.}}$$

4) Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, la série $\sum\left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ est absolument convergente, donc elle est convergente. Ceci implique que la suite $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite de vecteurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge coordonnée par coordonnée, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un vecteur } a.}$$

On a vu que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|x_{i,n+1} - x_{i,n}\right| \leq \lambda^n \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda^n \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \leq x_{i,n+1} - x_{i,n} \leq \lambda^n \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty .$$

Comme les séries $\sum\left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ et $\sum \lambda^n$ convergent, on a pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k \leq \sum_{k=n}^{+\infty}\left(x_{i,k+1} - x_{i,k}\right) \leq \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k .$$

Si pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a_i, on a $\sum_{k=n}^{+\infty}\left(x_{i,k+1} - x_{i,k}\right) = a_i - x_{i,n}$.

Et comme $\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^k = \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}$, on obtient pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leq a_i - x_{i,n} \leq \left\|x_1 - x_0\right\|_\infty \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \left|x_{i,n} - a_i\right| \leq \frac{\left\|x_1 - x_0\right\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n .$$

L'inégalité ci-dessus étant vraie pour toutes les composantes de $x_n - a$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\left\|x_n - a\right\|_\infty \leq \frac{\left\|x_1 - x_0\right\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n}$$

5) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de *F*, qui est fermé, donc sa limite *a* appartient à *F*.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = a$ et *f* est continue sur *F* (car lipschitzienne), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n) = f(a)$.

Ainsi :

$$\boxed{f(a) = a}$$

Nous venons donc de trouver une vecteur *a* de *F* tel que $f(a) = a$, autrement *f* admet un point fixe dans *F*.

Finalement, avec le résultat de la première question, on peut conclure que :

$$\boxed{f \text{ possède un unique point fixe dans } F.}$$

Exercice 5

1) Commençons par reformuler la continuité de *f* sur *E*. *f* est continue sur *E* si et seulement si :

$$\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in E,\ \|x-a\|\leq \alpha\ \Rightarrow\ \|f(x)-f(a)\|\leq \varepsilon .$$

On peut rendre stricte les inégalités sans altérer l'équivalence :

$$\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x\in E,\ \|x-a\|< \alpha\ \Rightarrow\ \|f(x)-f(a)\|< \varepsilon .$$

Ceci se reformule alors en :

$$\begin{aligned} &\left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ x\in B(a,\alpha)\ \Rightarrow\ f(x)\in B\big(f(a),\varepsilon\big)\right]\\ \Leftrightarrow\ &\left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ x\in B(a,\alpha)\ \Rightarrow\ x\in f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right]\\ \Leftrightarrow\ &\left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right]\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f \text{ est continue sur } E\ \Leftrightarrow\ \left[\forall\, a\in E,\ \forall\, \varepsilon\in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha\in \mathbb{R}_+^*,\ B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\right].$$

($\Rightarrow$) Supposons *f* continue sur *E*.

Soit *O* une partie ouverte de *F*. Si $f^{-1}(O)$ est vide alors elle est ouverte. Sinon, pour tout $a\in f^{-1}(O)$, on a $f(a)\in O$. Comme *O* est ouverte, il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(f(a),\varepsilon)\subset O$ et donc, $f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)\subset f^{-1}(O)$.

Or, d'après ce qui précède, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$, donc $B(a,\alpha)\subset f^{-1}(O)$.

Ainsi, pour tout $a\in f^{-1}(O)$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}(O)$, ce qui prouve que $f^{-1}(O)$ est ouverte.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie ouverte de *F* est une partie ouverte de *E*.

Soient $a\in E$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$.

Comme $B\big(f(a),\varepsilon\big)$ est une partie ouverte de *F*, $f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$ est une partie ouverte de *E*.

Or, $f(a)\in B\big(f(a),\varepsilon\big)$, donc $a\in f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$ et ainsi, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$.

Ainsi, pour tout $a\in E$ et pour tout $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,\alpha)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(a),\varepsilon\big)\Big)$, ce qui prouve que *f* est continue sur *E*.

Finalement, on a bien :

f est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de *F* est un ouvert de *E*.

2) ($\Rightarrow$) Supposons *f* continue sur *E*.

Soit *A* une partie ouverte de *F*. Si $f^{-1}(A)$ est vide alors elle est ouverte. Sinon, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f^{-1}(A)$ convergeant vers $a\in E$. On a $a_n\to a$ et *f* continue en *a*, donc $f(a_n)\to f(a)$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\in f^{-1}(A)$, donc $f(a_n)\in A$ et comme *A* est fermée et $f(a_n)\to f(a)$, on a $f(a)\in A$.

Ainsi, $a\in f^{-1}(A)$ et donc toute suite convergente de $f^{-1}(A)$ converge dans $f^{-1}(A)$, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est fermée.

($\Leftarrow$) Supposons que l'image réciproque de toute partie fermée de F est une partie fermée de E.

Soit A une partie ouverte de F. On a $f^{-1}(F\setminus A)=E\setminus f^{-1}(A)$. En effet :

$$x\in f^{-1}(F\setminus A) \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in F\setminus A \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\notin A \quad\Leftrightarrow\quad x\notin f^{-1}(A) \quad\Leftrightarrow\quad E\setminus f^{-1}(A).$$

Comme A est ouverte, $F\setminus A$ est fermée, donc $f^{-1}(F\setminus A)=E\setminus f^{-1}(A)$ est fermée, ce qui prouve que $f^{-1}(A)$ est ouverte. Ainsi, l'image réciproque de toute partie ouverte de F est une partie ouverte de E, donc f est continue sur E d'après la question précédente.

Finalement, on a bien :

f est continue sur E si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

3) Posons $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. La fonction f est définie et continue (car rationnelle) sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a $f(\mathbb{R})=[0,1[$ qui n'est ni ouvert, ni fermé. Or, $\mathbb{R}$ est un fermé et un ouvert de $\mathbb{R}$, donc :

L'image d'un ouvert (*resp*. fermé) par une application continue n'est pas forcément ouverte (*resp*. fermée).

Exercice 6

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det M$ est polynomiale (et même affine) en chacun des coefficients de M, donc l'application $\det : M\mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Or, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\setminus GL_n(\mathbb{K})=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det M=0\right\}=\det^{-1}\left(\{0\}\right)$.

Comme $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\setminus GL_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque d'une partie fermée de $\mathbb{K}$ par une application continue, donc est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, d'après l'exercice précédent.

Finalement, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\setminus GL_n(\mathbb{K})$ est fermé :

$$\boxed{GL_n(\mathbb{K}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).}$$

On veut montrer que $\overline{GL_n(\mathbb{K})}=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\subset\overline{GL_n(\mathbb{K})}$, autrement dit que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $GL_n(\mathbb{K})$.

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r\in[\![0,n]\!]$. Il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $M=PJQ$ où :

$$J=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r}\end{pmatrix}.$$

Posons alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $M_k=PJ_kQ$ avec $J_k=\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \frac{1}{k}I_{n-r}\end{pmatrix}$.

On a immédiatement $J_k\to J$ quand $k\to+\infty$ (car $\|J_k-J\|_\infty=\dfrac{1}{k}$) et, comme l'application $X\mapsto PXQ$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $M_k\to PJQ=M$.

Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\det J = \dfrac{1}{k^{n-r}} \neq 0$ donc $\det M_k = \det P \times \det J_k \times \det Q \neq 0$ et $M_k \in GL_n(\mathbb{K})$.

Finalement, on a trouvé une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de matrices inversibles qui converge vers *M*, donc $M \in \overline{GL_n(\mathbb{K})}$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 7

D'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour n'importe quelle norme). De plus, l'application $M \mapsto \|M-B\|$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle admet un minimum sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, atteint en $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$. Comme $\|A-B\|$ est le minimum de $M \mapsto \|M-B\|$ sur $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a alors immédiatement $\|A-B\| \leq \|M-B\|$ pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe une deuxième matrice A' de $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, .

Comme *A* et A' appartiennent toutes deux à $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A'-B\| \leq \|A-B\|$ et $\|A-B\| \leq \|A'-B\|$, donc :

$$\|A'-B\| = \|A-B\|.$$

Toujours d'après l'exercice 7 du TD sur les espaces vectoriels normés, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc pour tout $t \in [0,1]$, $tA+(1-t)A' \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et $\|A-B\| \leq \|tA+(1-t)A'-B\|$. Or :

$$\|tA+(1-t)A'-B\| = \|t(A-B)+(1-t)(A'-B)\| \leq t\|A-B\| + (1-t)\|A'-B\| = \|A-B\|.$$

Ainsi :

$$\|tA+(1-t)A'-B\| = \|A-B\|.$$

Or, ici $\|.\|$ est une norme euclidienne donc dérive d'un produit scalaire et :

$$\|tA+(1-t)A'-B\|^2 = \|t(A-A')+A'-B\|^2 = t^2\|A-A'\|^2 + 2t\left(A-A' \mid A'-B\right) + \|A'-B\|^2.$$

Avec $\|A'-B\| = \|A-B\|$, on obtient, pour tout $t \in [0,1]$:

$$t^2\|A-A'\|^2 + 2t\left(A-A' \mid A'-B\right) = 0.$$

Or, l'application polynôme $t \mapsto t^2\|A-A'\|^2 + 2t\left(A-A' \mid A'-B\right) = 0$ est nulle sur $[0,1]$ si et seulement si ses coefficients sont nuls, donc $\|A-A'\|^2 = 0$, ce qui entraine immédiatement $A = A'$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe une unique matrice } A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que pour tout } M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R}),\ \|A-B\| \leq \|M-B\|.}$$

Exercice 8

On veut montrer : $\exists\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in E$, $N\left(f(x)\right) \leq k\|x\|$.

Raisonnons par l'absurde en supposant le contraire, c'est-à-dire : $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\exists\, x \in E$, $N\left(f(x)\right) > k\|x\|$.

En particulier ceci est vrai pour *k* entier, donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in E$, $N\left(f(x_n)\right) > n\|x_n\|$.

Comme *f* est linéaire, si $x_n = 0$, on a $f(x_n) = 0$ et donc $N\left(f(x_n)\right) = n\|x_n\| = 0$, qui est exclu, donc $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on peut poser $u_n = \dfrac{1}{\|x_n\|} x_n$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| = 1$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et :

$$N\left(f(u_n)\right) = N\left(f\left(\frac{1}{\|x_n\|} x_n\right)\right) = N\left(\frac{1}{\|x_n\|} f(x_n)\right) = \frac{N\left(f(x_n)\right)}{\|x_n\|} > n\,.$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais pas $\left(f(u_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui contredit les hypothèses.

Ainsi, il existe bien un réel *k* tel que pour tout $x \in E$, $N\left(f(x)\right) \leq k\|x\|$. Ceci veut dire que *f* est lipchitzienne et donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } E.}$$

Exercice 9

1) En assimilant $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}$, on a $E_p = \{z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Pour } n = 1,\ E_p \text{ est l'ensemble des racines de } P.}$$

Dans ce cas, E_p est fini (de cardinal au plus le degré de *P*) et donc :

$$\boxed{\text{Pour } n = 1, \text{ tous les éléments de } E_p \text{ sont isolés.}}$$

2) Si une telle boule $B_0 = B(0_n, r)$ avec $r > 0$ existe, alors pour tout $H \in B_0$, $I_n + H$ est inversible, donc $\det(I_n + H) \neq 0$. Or, $\det I_n = 1 \neq 0$ et $M \mapsto \det M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|M - I_n\| < r$, on a $-\varepsilon < \det M - \det I_n < \varepsilon$.

En particulier pour $\varepsilon = 1$, on a pour tout $H = M - I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|H\| < r$, $0 < \det(I_n + H)$, ce qui implique que pour tout $H \in B_0 = B(0_n, r)$, $\det(I_n + H) \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une boule ouverte } B_0 = B(0_n, r) \text{ telle que } I_n + H \text{ soit inversible pour tout } H \in B_0.}$$

3) Si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k = \lambda I_n + \dfrac{1}{k+1} E_{1,n}$ (où $E_{1,n}$ est la matrice de la base canonique dans laquelle le 1 est à la fin de la première ligne. On a $E_{1,n}^2 = 0_n$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = \dfrac{1}{(k+1)^2} E_{1,n}^2 = 0_n$ et :

$$\|M_k - \lambda I_n\| = \left\|\frac{1}{k+1} E_{1,n}\right\| = \frac{1}{k+1}\|E_{1,n}\| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0\,.$$

Donc, $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers λI_n. Ainsi :

$$\boxed{\text{La suite } (M_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\lambda I_n + \frac{1}{k+1} E_{1,n}\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \lambda I_n \text{ et vérifie } (M_k - \lambda I_n)^2 = 0_n, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.}$$

4) Remarquons que si $Q \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $P(QMQ^{-1}) = QP(M)Q^{-1} = Q\,0_n Q^{-1} = 0_n$, donc $QMQ^{-1} \in E_p$.

Comme M est un point isolé de E_p, il existe $R > 0$ tel que $B(M,R) \cap E_p = \{M\}$.

Soit $H \in B_0 = B(0_n, r)$ (de la question 2). On a alors $I_n + H \in GL_n(\mathbb{C})$, donc $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in E_p$.

L'application $\Psi : H \mapsto (I_n + H)M(I_n + H)^{-1}$ est rationnelle en les coefficients de H, donc continue sur B_0. Comme $\Psi(0_n) = M$, il existe $r' > 0$ tel que $r' \le r$ et pour tout $H \in B_0$ telle que $\|H\| < r'$:

$$\left\|(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} - M\right\| < R.$$

Autrement dit, pour tout $H \in B_1 = B(0_n, r')$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M,R)$.

Finalement, pour tout $H \in B_1$, on a $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M,R)$ et $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in E_p$, donc :

$$(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} \in B(M,R) \cap E_p = \{M\} \quad \Rightarrow \quad (I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe une boule ouverte } B_1 = B(0_n, r') \text{ telle que pour tout } H \in B_1,\ (I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M.}$$

5) Remarquons déjà que :

$$(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M \quad \Leftrightarrow \quad (I_n + H)M = M(I_n + H) \quad \Leftrightarrow \quad M + HM = M + MH \quad \Leftrightarrow \quad HM = MH.$$

Ainsi, toutes les matrices de $B_1 = B(0_n, r')$ commutent avec M.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A = 0_n$, alors A et M commutent, sinon $\|A\| \neq 0$ et on peut poser $H = \dfrac{r'}{2\|A\|}A$.

On a $\|H\| = \dfrac{r'}{2} < r'$, donc $H \in B_1$ et ainsi :

$$HM = MH \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{r'}{2\|A\|}A\right)M = M\left(\frac{r'}{2\|A\|}A\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r'}{2\|A\|}AM = \frac{r'}{2\|A\|}MA \quad \Leftrightarrow \quad AM = MA.$$

Donc, A et M commutent et finalement :

$$\boxed{M \text{ commute avec toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

En particulier, si $M = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ commute avec toute matrice, on a $ME_{i,j} = E_{i,j}M$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.

Or, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $j^{\text{ième}}$ qui est la $i^{\text{ième}}$ colonne de M, et $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la $i^{\text{ième}}$ qui est la $j^{\text{ième}}$ ligne de M.

Ceci donne $a_{i,j} = 0$ quand $i \neq j$ et $a_{1,1} = a_{2,2} = \ldots = a_{n,n}$, et donc :

$$\boxed{M \text{ est une matrice d'homothétie.}}$$

Enfin, si $M = \lambda I_n$, on a $P(M) = P(\lambda I_n) = P(\lambda)I_n = 0_n$, donc $P(\lambda) = 0$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Le rapport de } M \text{ est une racine de } P.}$$

6) Si λ est racine multiple de *P*, alors on peut écrire $P=(X-\lambda)^2Q$, avec $Q\in\mathbb{C}[X]$ et pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$P(M)=(M-\lambda I_n)^2Q(M).$$

D'après la question 3, il existe une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers λI_n et telle que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(M_k-\lambda I_n)^2=0_n$, donc $P(M_k)=(M_k-\lambda I_n)^2Q(M_k)=0_n$.

Ainsi, $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de E_p qui converge vers λI_n, donc on peut trouver des matrices de E_p aussi proches de λI_n que l'on veut et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est racine multiple de } P\text{, alors } \lambda I_n \text{ n'est pas un point isolé de } E_p.}$$

7) Soit λ une racine simple de *P*. On peut alors écrire $P=(X-\lambda)Q$, avec $Q\in\mathbb{C}[X]$ et $Q(\lambda)\neq 0$.

On a $P(\lambda I_n)=P(\lambda)I_n=0_n$, donc $\lambda I_n\in E_p$.

Supposons que λI_n n'est pas un point isolé de E_p. Il existe alors une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de E_p, toutes différentes de λI_n et convergeant vers λI_n.

Remarquons que l'application $M\mapsto\chi_M=\det\left(XI_n-M\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (car $M\mapsto XI_n-M$ l'est et $M\mapsto\det M$ aussi). Alors, comme $\lim\limits_{k\to+\infty}M_k=\lambda I_n$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}\chi_{M_k}=\chi_{\lambda I_n}=(X-\lambda)^n$. Alors, si λ_k est une valeur propre de M_k, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k=\lambda$.

Notons $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ les racines de *Q* (distinctes ou pas), soit $Q=\gamma\prod\limits_{j=1}^{p}(X-\alpha_j)$ avec $\gamma\neq 0$.

Comme $Q(\lambda)\neq 0$, on a $\alpha_j\neq\lambda$ pour tout $j\in[\![1,p]\!]$ et donc $\varepsilon=\min\limits_{j\in[\![1,p]\!]}\left|\alpha_j-\lambda\right|>0$.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty}\lambda_k=\lambda$, on a $\left|\lambda_k-\lambda\right|<\varepsilon$ et donc $\lambda_k\neq\alpha_j$ pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, à partir d'un certain rang $N\in\mathbb{N}$.

Ainsi, à partir du rang N, les α_j ne sont pas valeur propre de M_k, donc $M_k-\alpha_jI_n$ est inversible pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, et donc $Q(M_k)=\gamma\prod\limits_{j=1}^{p}(M_k-\alpha_jI_n)$ est inversible.

Enfin, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $M_k\in E_p$, donc $P(M_k)=(M_k-\lambda I_n)Q(M_k)=0_n$ et à partir du rang N, $Q(M_k)$ est inversible, donc $(M_k-\lambda I_n)Q(M_k)Q(M_k)^{-1}=M_k-\lambda I_n=0_n$, soit $M_k=\lambda I_n$. Ceci est absurde car par hypothèse, toutes les matrices M_k sont différentes de λI_n.

Finalement, supposer que λI_n n'est pas un point isolé de E_p mène à une absurdité, donc :

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est racine simple de } P \text{ alors } \lambda I_n \text{ est un point isolé de } E_p.}$$