Corrigés des TD du chapitre 4

Exercice 1

On pose $f_n(t)=(t^2+1)\dfrac{n\,e^t+t\,e^{-t}}{n+t}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f:t\mapsto(t^2+1)e^t$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\left|f_n(t)-f(t)\right|=\left|(t^2+1)\frac{n\,e^t+t\,e^{-t}}{n+t}-(t^2+1)e^t\right|=\left|(t^2+1)\frac{2t\,\mathrm{sh}\,t}{n+t}\right|\le\frac{2(t^2+1)t\,\mathrm{sh}\,t}{n}\le\frac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}.$$

Donc $\|f_n-f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}\left|f_n(t)-f(t)\right|\le\dfrac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}$ et, comme $\dfrac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}\to0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1 f_n(t)dt\right]=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\left[f_n(t)\right]dt=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+1)e^t dt.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1(t^2+1)e^t dt&=\left[(t^2+1)e^t\right]_0^1-\int_0^1 2te^t dt=\left[(t^2+1)e^t\right]_0^1-\left[2te^t\right]_0^1+\int_0^1 2e^t dt\\&=\left[(t^2+1)e^t-2te^t+2e^t\right]_0^1=\left[(t^2-2t+3)e^t\right]_0^1=2e-3\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1(t^2+1)\frac{n\,e^t+t\,e^{-t}}{n+t}dt\right]=2e-3}$$

Exercice 2

1) Pour $x\in\mathbb{R}_+$, posons $f_x(t)=t^3+xt-1$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f_x est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f_x, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{L'équation } (E_{x,n}) \text{ admet une unique solution réelle.}}$$

Remarquons que $f_x(0)=-1<\dfrac{1}{n}=f_x\left(u_n(x)\right)$, donc $u_n(x)>0$ car f_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^3+xu_n(x)-1-\frac{1}{n}=0\quad\Leftrightarrow\quad f_x\left(u_n(x)\right)=\frac{1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad u_n(x)=f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme f_x est continue sur $\mathbb{R}$, f_x^{-1} l'est aussi et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0} f_x^{-1}(t) = f_x^{-1}(0).$$

Et on a $f_x(t) = t^3 + xt - 1 = 0$ quand $t = f_x^{-1}(0)$, donc $f_x^{-1}(0)$ est l'unique solution de $t^3 + xt - 1 = 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers une fonction } u \text{ telle que pour tout } x\in\mathbb{R}_+,\ u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0.}$$

On a $f_x\big(u(x)\big) = 0$. Or, la fonction f_x est strictement croissante et $f_x(0) = -1 < 0$, donc $u(x) > 0$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, soit :

$$x = \frac{1-u(x)^3}{u(x)} = \frac{1}{u(x)} - u(x)^2 = g\big(u(x)\big)$$

avec $g(t) = \dfrac{1}{t} - t^2$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$g\big(u(x)\big) = x \quad\Leftrightarrow\quad u(x) = g^{-1}(x).$$

La fonction g étant continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection continue assure que la fonction g^{-1} est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } u \text{ est continue et strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Remarquons que $g(1) = 0$, donc $g^{-1}(0) = 1$ et $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} g^{-1} = 0$.

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, g^{-1} est strictement décroissante de 1 à 0, d'où :

$$u(0) = 1 \quad\text{et}\quad \lim_{+\infty} u = 0.$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 = \dfrac{1}{n}$ et $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, donc :

$$u_n(x)^3 - u(x)^3 + xu_n(x) - xu(x) = \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad \big[u_n(x) - u(x)\big]\Big[u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x\Big] = \frac{1}{n}.$$

Remarquons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) > 0$ et $u(x) > 0$, donc :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > u(x)^2 + x$$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : x \mapsto u(x)^2 + x$ est continue (somme de telle fonctions), strictement positive (car u l'est) et telle que $h(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$. Ceci permet de conclure que h admet un minimum $\mu > 0$ et ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > \mu \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < k = \frac{1}{\mu}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|u_n(x) - u(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < \frac{k}{n}.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|u_n - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x) - u(x)| \le \frac{k}{n}.$$

Enfin, comme $\frac{k}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } u.}$$

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt$, donc f_{n+1} est définie sur $[0,1]$ si l'on peut intégrer f_n sur ce segment, et ceci est le cas, quand f_n est continue sur $[0,1]$.
Si cela est vrai, alors $F_n : x \mapsto \int_0^x f_n(t)\,dt$ est elle aussi continue sur $[0,1]$ (et même de classe C^1), donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme $f_0 = \varphi$ est continue sur $[0,1]$, nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie et continue sur $[0,1]$:

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction *f*, alors *f* est continue sur $[0,1]$ (car toutes les fonctions f_n le sont), $f_{n+1} \to f$ quand $n \to +\infty$ et pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers *f* sur $[0,x]$, donc $\int_0^x f_n(t)\,dt \to \int_0^x f(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient alors pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Ceci prouve immédiatement que $f(0) = 1$ et *f* est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f' = f$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément, c'est vers la fonction exponentielle.}}$$

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) = f_n(x) - e^x$ et $\mu = \sup_{[0,1]} |g_0|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - e^x = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt - e^x = \int_0^x \left(f_n(t) - e^t \right) dt = \int_0^x g_n(t)\,dt.$$

Donc :

$$|g_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x g_n(t)\,dt \right| \le \int_0^x |g_n(t)|\,dt.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, on a $|g_n(x)|\le \mu\dfrac{x^n}{n!}$.

- On a $\mu=\sup\limits_{[0,1]}|g_0|$, donc pour tout $x\in[0,1]$, $|g_0(x)|\le\mu=\mu\dfrac{x^0}{0!}$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$, soit pour tout $x\in[0,1]$, $|g_n(x)|\le\mu\dfrac{x^n}{n!}$.

  Alors, pour tout $x\in[0,1]$:

$$|g_{n+1}(x)|\le\int_0^x|g_n(t)|\,dt\le\int_0^x\mu\frac{t^n}{n!}dt=\mu\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $\mu\dfrac{x^n}{n!}\le\dfrac{\mu}{n!}$, donc $|g_n(x)|\le\dfrac{\mu}{n!}$, soit pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in[0,1]}|g_n(x)|\le\frac{\mu}{n!}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mu}{n!}=0$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f_n-\exp)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction exponentielle.}}$$

Exercice 4

1) Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, $\zeta(x)$ est la somme d'une série de Riemann convergente, donc est bien défini.

De plus, pour tout $a\in\,]1;+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sup\limits_{x\in[a;+\infty[}\left|\dfrac{1}{n^x}\right|=\dfrac{1}{n^a}$ et $\sum\dfrac{1}{n^a}$ converge (car $a>1$).

Ainsi, la série $\sum\dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, et comme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto\dfrac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ est continue sur cet intervalle, la fonction ζ est continue sur $[a;+\infty[$.

Ainsi, ζ est définie et continue sur $[a;+\infty[$ pour tout $a\in\,]1;+\infty[$, donc :

$$\boxed{\zeta \text{ est définie et continue sur }]1;+\infty[.}$$

2) Soient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n:x\mapsto\dfrac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ et $a\in\,]1;+\infty[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ (comme composée de fonctions de classe C^∞) et pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]1;+\infty[$:

$$f_n^{(k)}(x)=(-\ln n)^k e^{-x\ln n}=\frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Alors, pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x\in[a;+\infty[}\left|f_n^{(k)}(x)\right|=\frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

On peut écrire $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = \dfrac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} \dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}$ et comme $\dfrac{a-1}{2} > 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}} = 0$ et donc :

$$\sup_{x \in [a;+\infty[} \left| f_n^{(k)}(x) \right| = \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}} \right).$$

Comme $a > 1$, on a $\dfrac{a+1}{2} > 1$, et donc la série $\sum \dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge, ce qui prouve que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ et ainsi, ζ est de classe C^∞ sur $[a;+\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a \in]1;+\infty[$:

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1;+\infty[\text{ et pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in]1;+\infty[,\ \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.}$$

3) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{-\ln n}{n^x} = -\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^x} < 0.$$

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Par ailleurs, $\sum \dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2;+\infty[$, donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^x} = 1.$$

Enfin, pour tout $x \in]1;+\infty[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e^{-(x-1)\ln n}.$$

Or, pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-h} \geq 1 - h$, donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e^{-(x-1)\ln n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \big(1 - (x-1)\ln n\big) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - (x-1) \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n}.$$

Comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, pour tout réel $A > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum\limits_{n=1}^{N_0} \dfrac{1}{n} > A$ et :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=1}^{N_0} \frac{1}{n^x} > A - (x-1) \sum_{n=1}^{N_0} \frac{\ln n}{n}.$$

Alors, si ζ admet une limite finie ℓ en 1, l'inégalité ci-dessus donne $\ell \geq A$ en passant à la limite quand $x \to 1$.

Ainsi, on aurait $\ell \geq A$ pour tout réel $A > 0$, ce qui est absurde, et donc comme ζ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, on a $\lim\limits_{x \to 1} \zeta(x) = +\infty$.

On obtient le tableau :

x	1		$+\infty$
ζ	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

4) D'après ce qui précède, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est absolument convergente pour tout $x \in]1;+\infty[$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \tau \text{ est bien définie sur }]1;+\infty[\,.}$$

On a pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\tau(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} - \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x}$$

$$= \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} + \sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} - 2\frac{1}{2^x}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

Soit pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\boxed{\tau(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)}$$

5) La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$, donc, en tant que produit de telles fonctions :

$$\boxed{\text{La fonction } \tau \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1;+\infty[\,.}$$

6) La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme est $\ln 2$ (obtenue avec la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1).

De plus, d'après le théorème sur les séries alternées, on a pour tout $x \in [1;+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Ceci prouve que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sont toutes continue (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$), la fonction $x \mapsto \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et donc, τ est prolongeable par continuité en 1, avec $\lim\limits_{x\to 1} \tau(x) = \ln 2$.

Alors :

$$\zeta(x) = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1}\tau(x) = \frac{2^{x-1}}{e^{(x-1)\ln 2}-1}\tau(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)\ln 2}\ln 2\,.$$

Soit :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

On a vu plus haut que pour tout $x\in[1;+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\tau(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^x}$.

En particulier, pour $n=1$, on obtient pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$|\tau(x)-1|\leq\frac{1}{2^x}.$$

En passant à la limite quand $x\to+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\tau(x)=1$. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\tau(x)}{1-\frac{1}{2^{x-1}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Donc :

$$\boxed{\zeta(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1}$$

Exercice 5

Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$|f_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (et $\mathbb{R}_-^*$).

Soit $x>0$ fixé.

La fonction $t\mapsto\frac{1}{x^2+t^2}$ est décroissante, continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale, qui donne pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1}\frac{dt}{x^2+t^2}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\int_0^{n}\frac{dt}{x^2+t^2}.$$

Or :

$$\int_0^{n}\frac{dt}{x^2+t^2}=\frac{1}{x}\int_0^{n}\frac{\frac{1}{x}dt}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

Et en passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2x}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{2x}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\pi}{2}\leq x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}.$$

On a alors immédiatement par le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty}\left[x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\right]=\frac{\pi}{2}$, soit :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{x^2+n^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 6

1) Une étude rapide de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, montre que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \le x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

Alors, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \le f_n(x) \le \frac{1}{4^n}.$$

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{4^n}$ converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$. On intègre par parties :

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}(1-t)^n\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} n(1-t)^{n-1} dt = \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1} dt.$$

En recommençant plusieurs fois de suite, on obtient :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2} dt = \ldots = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\int_0^1 t^{n+k}(1-t)^{n-k} dt \ldots = \frac{n(n-1)\ldots(1)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}\int_0^1 t^{2n} dt.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la relation reste vraie pour $n = 0$) :

$$\boxed{I_n = \frac{n! \times n!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynômiale, donc continue sur $[0,1]$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc la série $\sum I_n$ converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \le t(1-t) \le \frac{1}{4} < 1$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}[t(1-t)]^n = \frac{1}{1-t(1-t)} = \frac{1}{t^2-t+1}.$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement, avec $I_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ converge avec } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ et rationnelle) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\frac{1}{(1+n^2x)^2} > 0.$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $f_n(0)=0$ à $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{n^3x} = \dfrac{1}{n^3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+.}$$

2) Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{S = \sum_{n\geq 1} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et, on a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\frac{(-1)^{k+1}n^{2(k-1)}k!}{(1+n^2x)^{k+1}}.$$

Ici, on a immédiatement $\sup\limits_{\mathbb{R}_+}\left|f_n^{(k)}\right| = |f_n'(0)| = n^{2k-3}k!$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^{2k-3}}$ diverge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il n'y a pas de convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Par contre, pour tout réel $a > 0$, on a $\sup\limits_{[a,+\infty[}\left|f_n^{(k)}\right| = \left|f_n^{(k)}(a)\right| = \dfrac{n^{2k-3}k!}{(1+n^2a)^{k+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{n^5a^{k+1}}$.

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^5}$ converge, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ et donc, pour tout réel $a > 0$, S est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0)=0$, donc $S(0)=0$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{S(x)-S(0)}{x}=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{f_n(x)}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2x)}.$$

Par comparaison série-intégrale, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(1+k^2x)}\geq\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}$$

Et :

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}\underset{u=t^2x}{=}\frac{1}{2}\int_x^{(n+1)^2x}\frac{du}{u(1+u)}=\frac{1}{2}\int_x^{(n+1)^2x}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x}\right)-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right].$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x}=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2x)}\geq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{S(x)-S(0)}{x}\geq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right).$$

Enfin, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\right]=+\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{S(x)-S(0)}{x}=+\infty.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{S\text{ n'est pas dérivable en }0.}$$

3) On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{n^3}$ et que le série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\geq 1}f_n(x)=\sum_{n\geq 1}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}.$$

Et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^3}=\zeta(3)$ où ζ est la fonction de l'exercice 4 (on a $\zeta(3)\approx 1,2$), donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}S(x)=\zeta(3)}$$

Exercice 8

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n(t)\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{t^n\ln t}{\ln n}$.

Si $t\in\,]0,1[$, alors $u_n(t)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum u_n(t)$ converge et si $t\in\,]1,+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(t)=+\infty$, donc $\sum u_n(t)$ diverge grossièrement. Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(1)=0$, donc $\sum u_n(1)$ converge (et vaut 0).

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } S \text{ est définie sur }]0,1].}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\left]0,1\right]$ avec pour tout $t \in \left]0,1\right]$:

$$u_n'(t) = \frac{n\,t^{n-1}\ln t + t^{n-1}}{H_n} = \frac{n\,t^{n-1}}{H_n}\left(\ln t + \frac{1}{n}\right).$$

On a alors le tableau :

t	0		$e^{-1/n}$		1
u_n	0	$\searrow$	$u_n(e^{-1/n})$	$\nearrow$	0

Donc, $\sup\limits_{]0,1]}|u_n| = |u_n(e^{-1/n})| = \dfrac{1}{e\,n H_n}$.

Or, $\dfrac{1}{e\,nH_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{e\,n\ln n}$ et la série $\sum \dfrac{1}{e\,n\ln n}$ diverge (s'obtient par comparaison série-intégrale avec $\int^n \dfrac{dt}{t\ln t} = \ln(\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$), donc $\sum \sup\limits_{]0,1]}|u_n|$ et S ne converge pas normalement sur $\left]0,1\right]$.

Par contre, la suite $(e^{-1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ croit vers 1, donc pour tout $a \in]0,1[$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $a < e^{-1/n}$ et dans ce cas, on a $\sup\limits_{]0,a]}|u_n| = |u_n(a) = -u_n(a)|$. Comme la série $\sum u_n(a)$ converge, S converge normalement sur $]0,a]$ et finalement :

$$\boxed{S \text{ converge normalement sur tout intervalle de la forme }]0,a] \text{ avec } a\in]0,1[\text{, mais pas sur }]0,1[.}$$

3) Les fonctions u_n est de classe C^1 sur $\left]0,1\right]$, donc continues et comme S converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a \in]0,1[$, elle est continue sur $]0,1[$.

De plus, $S(1) = 0$ et pour tout $t \in]0,1[$:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{H_n} = \ln t \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1}(t-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(t-1)t^n}{H_n} = \frac{\ln t}{t-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}-t^n}{H_n}.$$

Et comme sur $]0,1[$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0 < \dfrac{t^n}{H_n} \leq t^n$ et $\sum t^n$ converge, la série $\sum \dfrac{t^n}{H_n}$ converge, donc :

$$S(t) = \frac{\ln t}{t-1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{H_n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n}\right) = \frac{\ln t}{t-1}\left(\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n}{H_{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n}\right) = \frac{\ln t}{t-1}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n}\right)t^n - t\right].$$

On a $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln t}{t-1} = 1$, donc, si la limite existe, on a :

$$\lim_{t\to 1} S(t) = \lim_{t\to 1}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{H_{n-1}} - \frac{1}{H_n}\right)t^n\right] - 1.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left(\dfrac{1}{H_{n-1}} - \dfrac{1}{H_n}\right)t^n\right| \leq \dfrac{1}{H_{n-1}} - \dfrac{1}{H_n}$. Or, la série $\sum\left(\dfrac{1}{H_{n-1}} - \dfrac{1}{H_n}\right)$ converge (télescopage) et a pour somme $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{H_{n-1}} - \dfrac{1}{H_n}\right) = \dfrac{1}{H_1} = 1$, donc $\sum\left(\dfrac{1}{H_{n-1}} - \dfrac{1}{H_n}\right)t^n$ converge uniformément sur $]0,1[$.

Comme $\lim\limits_{t\to 1}\left(\dfrac{1}{H_{n-1}}-\dfrac{1}{H_n}\right)t^n=\dfrac{1}{H_{n-1}}-\dfrac{1}{H_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\lim_{t\to 1}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{H_{n-1}}-\frac{1}{H_n}\right)t^n\right]=\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{H_{n-1}}-\frac{1}{H_n}\right)t^n\right]=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{H_{n-1}}-\frac{1}{H_n}\right)=1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to 1}S(t)=1-1=0=S(1)$, donc S est continue en 1 et donc :

$$\boxed{S\text{ est continue sur }]0,1].}$$

On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\left]0,1\right]$, avec de plus :

$$u_n'(t)=\frac{n\,t^{n-1}\ln t+t^{n-1}}{H_n}=\frac{t^{n-1}\left(n\ln t+1\right)}{H_n}.$$

On prouve, comme pour les u_n, que la série $\sum u_n'(t)$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $]0,a]$ avec $a\in]0,1[$, donc que S est de classe C^1 sur $]0,1[$.

Par contre, on a pour tout $t\in]0,1[$:

$$\frac{S(t)-S(1)}{t-1}=\frac{1}{t-1}\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(t)=\frac{\ln t}{t-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n}.$$

Avec toujours $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\ln t}{t-1}=1$, $t\mapsto\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1}$ admet une limite en 1 si et seulement si $t\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{H_n}$ en admet une.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $H_n\le n$, donc pour tout $t\in]0,1[$, $\dfrac{t^n}{n}\le\dfrac{t^n}{H_n}$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}=-\ln(1-t)\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{H_n}.$$

Comme $\lim\limits_{t\to 1}\left[-\ln(1-t)\right]=+\infty$, on a par comparaison $\lim\limits_{t\to 1}\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{t^n}{H_n}\right]=+\infty$ et donc $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1}=+\infty$. Ceci prouve que S n'est pas dérivable en 1 et finalement :

$$\boxed{S\text{ est dérivable sur }]0,1[\text{ (et même de classe }C^1\text{), mais pas en 1.}}$$

Exercice 9

1) Soit $x\mapsto a$ une éventuelle solution constante sur $\mathbb{R}$ de (E). On a alors :

$$a=2a-2a^2\quad\Leftrightarrow\quad(2a-1)a=0\quad\Leftrightarrow\quad a=0\text{ ou }\frac{1}{2}.$$

Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle et $x\mapsto\dfrac{1}{2}$ sont bien des solutions (constantes) de (E), donc :

$$\boxed{\text{Les solutions constantes sur }\mathbb{R}\text{ sont la fonction nulle et }x\mapsto\frac{1}{2}.}$$

2) La fonction $f : x \mapsto xh(x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2 \iff \forall x \in \mathbb{R},\ 2xh(2x) = 2xh(x) - 2x^2h(x)^2$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^*,\ h(2x) = h(x) - xh(x)^2$$

En 0, la dernière relation est toujours vraie, donc :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } h(2x) = h(x) - xh(x)^2 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$$

3) Soient $t, t' \in [0,1]$, on a :

$$T_x(t) - T_x(t') = t - \frac{x}{2}t^2 - t' + \frac{x}{2}t'^2 = (t - t')\left(1 - \frac{x(t+t')}{2}\right).$$

Comme $x \in [0,1]$ et $\frac{t+t'}{2} \in [0,1]$ (car $t, t' \in [0,1]$), on a $\frac{x(t+t')}{2} \in [0,1]$ et donc $1 - \frac{x(t+t')}{2} \in [0,1]$. Alors

$$|T_x(t) - T_x(t')| = |t - t'|\left|1 - \frac{x(t+t')}{2}\right| = |t - t'|\left(1 - \frac{x(t+t')}{2}\right) \leq |t - t'|.$$

Ce qui prouve que :

$$\boxed{T_x \text{ est 1-lipschitzienne sur } [0,1].}$$

De même, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\frac{x}{2}t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (avec $x \in [0,1]$), donc $T_x(t) = t - \frac{x}{2}t^2 = t\left(1 - \frac{x}{2}t\right) \in [0,1]$. Ainsi :

$$\boxed{T_x\left([0,1]\right) \subset [0,1]}$$

On a $h_0\left([0,1]\right) \subset [0,1]$.

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $h_n\left([0,1]\right) \subset [0,1]$. Alors, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\frac{x}{2} \in [0,1]$, donc :

$$h_n\left(\frac{x}{2}\right) \in [0,1] \text{ et } h_{n+1}(x) = T_x\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) \in [0,1]$$

car $T_x\left([0,1]\right) \subset [0,1]$.

Ceci prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_n\left([0,1]\right) \subset [0,1].$$

Soit maintenant $x \in [0,1]$ fixé. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|T_x\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) - T_x\left(h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right| \leq \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

De même, $\left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq \left|h_{n-1}\left(\frac{x}{4}\right) - h_{n-2}\left(\frac{x}{4}\right)\right|$ (si $n \geq 2$), donc :

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leq \left|h_{n-1}\left(\frac{x}{2^2}\right) - h_{n-2}\left(\frac{x}{2^2}\right)\right|.$$

On continue jusqu'à obtenir :

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right| \le \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|.$$

Ce résultat est aussi vrai pour $n=0$, donc vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Et $h_0 : x\mapsto 1$ et $h_1 : x\mapsto 1-\frac{x}{2}$, donc $h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)=-\frac{1}{2}\frac{x}{2^n}$ et :

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right| \le \frac{x}{2^{n+1}} \le \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right| \le \frac{1}{2^{n+1}}$.

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge, la série de fonctions $\sum\left(h_{n+1}-h_n\right)$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{La suite } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0,1].}$$

4) Notons *h* la limite de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$. Pour tout $x\in[0,1]$, on a :

$$h(x)=\lim_{n\to+\infty} h_{n+1}(x)=\lim_{n\to+\infty}\left[h_n\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]=h\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\left(h\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Donc, *h* vérifie $h(x)=h\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\left(h\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ sur $[0,1]$, ou bien $h(2x)=h(x)-x\,h(x)^2$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Alors, la fonction $f : x\mapsto xh(x)$ est définie sur $[0,1]$ et, d'après la question 2, on a $f(2x)=2f(x)-2f(x)^2$ pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (alors, $2x\in[0,1]$ et $f(2x)$ est bien défini), donc *f* est une solution de (*E*) sur $[0,1]$.

De plus, la fonction *h* est limite de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec h_0 constante donc continue sur $[0,1]$. Une récurrence simple permet de prouver que toutes fonctions h_n sont continues sur $[0,1]$, et comme la convergence de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers *h* est uniforme, la fonction *h* est continue sur $[0,1]$. La fonction *f* est alors continue sur $[0,1]$ en tat que produit de telles fonctions.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $h_{n+1}(0)=h_n(0)=h_0(0)=1$, et comme *h* est continue, elle ne s'annule pas au voisinage de 0. Alors, la fonction *f* ne s'annule alors pas non plus au voisinage de 0 (exclu), donc n'est pas nulle et comme $f(0)=0$, ce n'est pas $x\mapsto\frac{1}{2}$. Comme $x\mapsto 0$ et $x\mapsto\frac{1}{2}$ sont les deux seules solutions constantes de (*E*), *f* n'est pas constante et finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet une solution continue et non constante sur } [0,1].}$$

5) En conservant la fonction *f* de la question précédente, posons pour tout $x \in]1,2]$, $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2$.

On a alors pour tout $x \in [0,1]$, $2x \in [0,2]$ donc $f(2x)$ est bien défini et $f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$ (d'après la question précédente quand $x \le \frac{1}{2}$, et par définition de *f* sur $]1,2]$ quand $x > \frac{1}{2}$). Donc, *f* est définie sur $[0,2]$ et vérifie (*E*). Elle de plus continue sur $[0,1[$ et sur $]1,2]$, avec $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ et :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left[2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left[2f(x) - 2f(x)^2 \right] = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

Ainsi, on a construit une solution de (*E*) continue et non constante sur $[0,2]$.

En recommençant ainsi, on construit une solution de (*E*) continue et non constante sur $[0,4]$, puis sur $[0,8]$, puis sur tout $[0,2^p]$ avec $p \in \mathbb{N}$ et finalement sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet une solution continue et non constante sur } \mathbb{R}_+.}$$