Corrigés des TD du chapitre 5

Exercice 1

a. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\left|a_n z^n\right|=\left|\frac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}z^n\right|=\frac{n^2}{n^2+1}\left(\frac{|z|}{2}\right)^n.$$

La suite $\left(\left|a_n z^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z|\leq 2$, donc $R=2$ et pour $|z|=2$, $\left|a_n z^n\right|\to 1$, donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Ainsi :

$$\boxed{R=2 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

b. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}^*$:

$$\left|a_n z^n\right|=\left|\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}z^n\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}2\left(\frac{|z|}{e}\right)^n.$$

Comme ci-dessus :

$$\boxed{R=e \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\mathbb{C}$, on a :

$$\left|a_n z^n\right|\leq 9|z|^n.$$

Or, la suite $\left(9|z|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée quand $|z|\leq 1$, donc $\left(\left|a_n z^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi.

Remarquons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de chiffres (entiers compris entre 0 et 9) qui ne converge pas vers 0, car sinon, elle serait stationnaire sur 0 et $\sqrt{2}$ serait décimal, ce qui est faux. Donc, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, la série $\sum a_n (e^{i\theta})^n$ diverge grossièrement et ainsi :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}}$$

Pour mémoire : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=E\left(10^n\sqrt{2}\right)-10E\left(10^{n-1}\sqrt{2}\right)$.

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_n=\ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)=\ln\left[\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-½}\right]=\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Donc :

$$a_n=\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+\frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{3n^{1,5}}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right).$$

Ainsi, $|a_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme le rayon de convergence de $\sum\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est 1, on a $R=1$.

De plus, les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ convergent (CSSA, la seconde est même absolument convergente), mais pas la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.

De plus, avec ce qui précède, on a immédiatement $(-1)^n a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sum (-1)^n a_n$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}}$$

e. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto x^3+nx-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'annule une unique fois en a_n. Comme elle vaut $-1<0$ en 0 et $n\geq 0$ en 1, on a de plus, $0<a_n\leq 1$. Enfin :

$$a_n{}^3+na_n-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad n=\frac{1-a_n{}^3}{a_n}=g(a_n).$$

La fonction $g: x\mapsto \frac{1-x^3}{x}=\frac{1}{x}-x^2$ est continue sur $]0;1]$ et strictement décroissante de $+\infty$ à 0, donc elle réalise une bijection de $]0;1]$ dans $\mathbb{R}_+$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=g^{-1}(n)$.

D'après le théorème de la bijection continue, g^{-1} est continue sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante de 1 à 0, donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

Comme $a_n{}^3+na_n-1=0$, on a $na_n=1-a_n{}^3\to 1$, donc $a_n\sim\frac{1}{n}$.

Ceci nous permet de conclure que :

- le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$;
- la série $\sum a_n$ diverge.

Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la relation $a_n{}^3+na_n-1=0$ peut se récrire $a_n=\frac{1}{n}-\frac{a_n{}^3}{n}$ et comme $a_n\sim\frac{1}{n}$, on a $a_n{}^3\sim\frac{1}{n^3}$, soit $a_n{}^3=\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et ainsi :

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Alors, comme la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ converge absolument :

- la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Finalement :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge pour } x=1 \text{ et converge pour } x=-1.}$$

f. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n}|x| = \left(1+\frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)|x| \to |x|.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $R=1$.

Les séries $\sum(-1)^n \ln n$ et $\sum \ln n$ divergent grossièrement, donc :

$$\boxed{R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}}$$

De plus, pour tout $x \in]-1;1[$ et tout entier $N \geq 2$, on a :

$$(1-x)\sum_{n=1}^{N} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^n = \sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^n - \sum_{n=1}^{N}(\ln n)x^{n+1} = \sum_{n=2}^{N}(\ln n)x^n - \sum_{n=2}^{N+1}\big(\ln(n-1)\big)x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{N}\left[\ln n - \ln(n-1)\right]x^n + (\ln N)x^{N+1} = -\sum_{n=2}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n + (\ln N)x^{N+1}$$

Soit, pour tout $x \in]-1;1[$ et tout entier $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n x^n = -\frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{N}\left[\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]x^n + \frac{(\ln N)x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $(\ln N)x^{N+1} \to 0$ quand $N \to +\infty$, on obtient, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$f(x) = -\frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

On a $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc si $b_n = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$, on a $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Et, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+b_n\right)x^n.$$

On a vu dans le cours que pour tout $x \in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n = -\ln(1-x)$, donc :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n\right] = \frac{1}{1-x}\left[-\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n\right].$$

Comme $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[-1;1]$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty}b_n$ est finie.

Enfin, comme $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\left[-\ln(1-x)\right] = +\infty$, on a $\displaystyle -\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty}b_n x^n \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x)$, d'où :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}}$$

Exercice 2

1) a. On a $a_n \sim n^2$ donc :

$$\boxed{R=1}$$

Pour tout $x\in\ ]-1;1[$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0}\left(n^2-n+2+\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n\geq 0} n^2x^n - \sum_{n\geq 0} nx^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n+1}.$$

Et pour tout $x\in\ ]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} n^2x^n - \sum_{n\geq 0} nx^n + 2\sum_{n\geq 0} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}.$$

On a :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x},\quad \sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2},\quad \sum_{n\geq 0} n^2x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\quad \text{et}\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On obtient, pour tout $x\in\ ]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}$$

b. On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+2)^2}{(n+1)^3} \to 0$, on a :

$$\boxed{R=+\infty}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{n(n-1)+3n+1}{n!}x^n = \sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{(n-2)!} + 3\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} = x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + 3x\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n = (x^2+3x+1)e^x}$$

c. On a $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, donc :

$$\boxed{R=1}$$

Pour tout $x\in\ ]-1;1[$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n-(-1)^n}x^n = \sum_{\substack{n\geq 0\\ n\text{ pair}}}\frac{1}{n-1}x^n + \sum_{\substack{n\geq 0\\ n\text{ impair}}}\frac{1}{n+1}x^n.$$

Alors, pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}a_nx^n &= -1+x\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{1}{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\text{ impair}}}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = -1+x\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\text{ impair}}}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{x^n}{n}\\
&= -1+x\sum_{\substack{n\geq 0\\ n\text{ impair}}}\frac{x^n}{n}+x\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{x^n}{n}-x\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{x^n}{n} = -1+x\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}+\left(\frac{1}{x}-x\right)\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\text{ pair}}}\frac{x^n}{n}.\\
&= -1+x\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}+\left(\frac{1}{x}-x\right)\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n}}{2n} = -1+x\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\sum_{n\geq 1}\frac{(x^2)^n}{n}\end{aligned}$$

Et avec $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$, on obtient, pour tout $x\in\,]-1;1[\setminus\{0\}$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}a_nx^n = -1-x\ln(1-x)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\ln(1-x^2)}$$

d. On a $\displaystyle\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|\to 2\frac{2n-1}{n+1}|x|=4|x|$, on a :

$$\boxed{R=\frac{1}{4}}$$

Pour tout $x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$, on a :

$$\begin{aligned}(1+4x)f'(x)-2f(x) &= (1+4x)\sum_{n\geq 1}na_nx^{n-1}-2\sum_{n\geq 0}a_nx^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n\geq 0}(2n-1)a_nx^n\\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\binom{2n+2}{n+1}x^n+2\sum_{n\geq 0}(2n-1)\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\left[(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\binom{2n}{n}+2(2n-1)\frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}\right]x^n\end{aligned}$$

Donc, on a bien pour tout $x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$(1+4x)f'(x)-2f(x)=0.$$

Ainsi, f est solution sur $\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E): y'-\frac{2}{1+4x}y=0.$$

Les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto k\sqrt{1+4x}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Avec $f(0)=a_0=-1$, on obtient, pour tout $x\in\left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[$:

$$\boxed{f(x)=-\sqrt{1+4x}}$$

2) a. On a pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Remarquons que $\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ convergent et ainsi, la série $\sum a_n$ converge bien et on peut écrire :

$$\sum_{n\geq 2} a_n = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme ci-dessus, $\sum \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ convergent, d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 2} a_n &= \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{2}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n. \\ &= \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{5}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5}\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, on a $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, donc :

$$\sum_{n\geq 2} a_n = \frac{3}{5}\left[-\ln\left(1-\frac{3}{5}\right)\right] - \frac{3}{5}\left[-\ln\left(1-\frac{2}{5}\right)\right] + \frac{2}{5}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} a_n = \frac{3}{5}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}}$$

b. Ici, la série converge clairement.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$, donc avec *j* tel que $j^3 = 1$:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = e^1 + e^j + e^{j^2}.$$

Or :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}.$$

On a $1 + j + j^2 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $n = 3k$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k} + j^{6k} = 3$;
- si $n = 3k+1$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$;
- si $n = 3k+2$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+2} + j^{6k+42} = 1 + j^2 + j = 0$.

Donc :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1+j^n+j^{2n}}{n!}=\sum_{\substack{n\geq 0\\ 3|n}}\frac{3}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n)!}=3\sum_{n\geq 0}a_n\,.$$

Ainsi :

$$3\sum_{n\geq 0}a_n=e+e^j+e^{j^2}\,.$$

Avec $j^2=\overline{j}$, donc $e^{j^2}=e^{\overline{j}}=\overline{e^j}$, on obtient :

$$e^j+e^{j^2}=e^j+\overline{e^j}=2\operatorname{Re}(e^j)=2\operatorname{Re}(e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}})=2e^{-\frac{1}{2}}\operatorname{Re}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}})=\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}a_n=\frac{1}{3}\left[e+\frac{2}{\sqrt{e}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$

Exercice 3

1) On notera R le rayon de convergence de la série entière.

a. On a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{\sin 4x}{\sin x}=\frac{2\cos 2x\sin 2x}{\sin x}=\frac{4\cos 2x\cos x\sin x}{\sin x}=4\cos 2x\cos x=2\left(\cos 3x+\cos x\right).$$

Remarquons que *f* est prolongeable par continuité en 0.

La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\cos x=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

D'où pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{(3x)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$, soit :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n 2\frac{9^n+1}{(2n)!}x^{2n}\ \text{ avec }\ R=+\infty}$$

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^4-3x^2+2=(x^2-2)(x^2-1)\,.$$

Donc, pour tout $X\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$:

$$\frac{1}{X^2-3X+2}=\frac{1}{(X-2)(X-1)}=\frac{1}{1-X}-\frac{1}{2-X}=\frac{1}{1-X}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{X}{2}}\,.$$

Soit, pour tout $X\in\,]-1;1[$:

$$\frac{1}{X^2-3X+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}X^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{X}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)X^n\,.$$

Donc :

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{2n}\ \text{ avec }\ R=1}$$

c. Posons $u(x)=\dfrac{1+x}{1-x}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et :

$$u'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La fonction $f:x\mapsto \arctan\big(u(x)\big)$ est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, comme composée de u par la fonction arctangente qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{u(x)}{1+u(x)^2}=\frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1+\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{(1+x^2)\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)-2x\left(1-\tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{\sin\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{\sin\alpha}{(x-e^{i\alpha})(x-e^{-i\alpha})}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-e^{i\alpha}}-\frac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}x}-\frac{e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}x}\right).$$

Or, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, on a $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n$.

Alors, pour tout $x\in\,]-1;1[$, on a $\left|e^{i\alpha}x\right|<1$ et $\left|e^{-i\alpha}x\right|<1$ donc $\dfrac{1}{1-e^{i\alpha}x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n$ et $\dfrac{1}{1-e^{-i\alpha}x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n$, et :

$$f'(x)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\alpha}x)^n-e^{-i\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\alpha}x)^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{i(n+1)\alpha}-e^{-i(n+1)\alpha}}{2i}x^n.$$

Soit, pour tout $x\in\,]-1;1[$:

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\big((n+1)\alpha\big)x^n.$$

En intégrant terme à terme et avec $f(0)=\arctan\left(\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)=\dfrac{\alpha}{2}$ (car $\dfrac{\alpha}{2}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$), on obtient :

$$f(x)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{n+1}x^{n+1}=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n.$$

Remarquons que si $|x|>1$, alors $\left(\dfrac{\sin(n\alpha)}{n}x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas et finalement :

$$\boxed{f(x)=\frac{\alpha}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n\ \text{ avec }\ R=1.}$$

2) Comme $\operatorname{ch}x=1$ uniquement en $x=0$, la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{\operatorname{ch}x-1}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que différence de telles fonctions et on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{\operatorname{ch}x-1}=\frac{2(\operatorname{ch}x-1)-x^2}{x^2(\operatorname{ch}x-1)}.$$

La fonction ch est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$2(\operatorname{ch} x-1)-x^2=2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right)-x^2=2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}=x^4g(x) \text{ avec } g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+4)!}x^{2n}$$

$$x^2(\operatorname{ch} x-1)=x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-1\right)=x^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}=x^4h(x) \text{ avec } h(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Alors, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:

$$f(x)=\frac{x^4g(x)}{x^4h(x)}=\frac{g(x)}{h(x)}.$$

Remarquons que $h(0)=\frac{1}{2}\neq 0$ et sur $\mathbb{R}^*$, $x^2h(x)=\operatorname{ch} x-1\neq 0$ donc $h(x)\neq 0$. Ainsi, h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

De plus, les fonctions g et h sont (de par leur définition) développables en série entière sur $\mathbb{R}$, donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On a alors $\lim_0 f=\frac{g(0)}{h(0)}=\frac{1}{6}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et, ainsi prolongée, $f=\frac{g}{h}$ est le quotient de deux fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule jamais, donc :

La fonction *f* se prolonge par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

1) Notons $R>0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$.

La fonction *f* est deux fois dérivable sur $]-R;R[$ avec :

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n .$$

Comme *f* est solution de (E), on a pour tout $x\in\,]-R;R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+b\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+c\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+b(n+1)a_{n+1}+ca_n\right]x^n=0.$$

Or, une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{(n+2)(n+1)a_{n+2}+b(n+1)a_{n+1}+ca_n=0}$$

2) Si $c=-b-1$, l'équation (E) devient $y''+by'-(b+1)y=0$ et la relation ci-dessus s'écrit pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{n+2}=-\frac{b}{n+2}a_{n+1}+\frac{b+1}{(n+2)(n+1)}a_n .$$

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2+br-(b+1)=0$ de discriminant $\Delta=b^2+4(b+1)=(b+2)^2$.

Les racines sont $r_1=\frac{-b+(b+2)}{2}=1$ et $r_2=\frac{-b-(b+2)}{2}=-b-1$, et 1 est une racine double quand $b=-2$.

- Quand $b=-2$, les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto(\lambda x+\mu)e^x$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, soit :

$$x\mapsto(\lambda x+\mu)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda n+\mu}{n!}x^n .$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{\lambda n+\mu}{n!}$.

- Quand $b\neq-2$, les solutions de (E) sont de la forme $x\mapsto\lambda e^x+\mu e^{-(b+1)x}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, soit :

$$x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(-(b+1)x\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!}x^n .$$

Et, toujours par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!}$.

Finalement, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n=\begin{cases}\dfrac{\lambda+\mu(-b-1)^n}{n!} & \text{quand } b\neq-2\\ \dfrac{\lambda n+\mu}{n!} & \text{quand } b=-2\end{cases}\quad\text{avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2}$$

Exercice 5

1) a. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\geq 0$ et *f* est bornée sur $[0;1[$, il existe un réel $M>0$ tel que :

$$\forall\, x\in[0;1[,\ \ 0\leq\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leq\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=f(x)\leq M .$$

On a donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1[$, $0\leq\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\leq M$ et en passant à la limite quand $x\to1^-$, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq\sum_{k=0}^{n}a_k\leq M$. Ainsi, $\sum a_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par un réel fixé, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-1;1]$, $\left|a_nx^n\right|\leq a_n$ et $\sum a_n$ converge, donc la série $\sum a_nx^n$ converge normalement sur $[-1;1]$. Sa somme est alors continue sur ce segment et donc $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$, soit :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}f(x)=\sum_{n\geq0}a_n}$$

b. Prenons $a_n=(-1)^n$. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0;1[$:

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k=\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Donc, on a bien $R=1$ et $f:x\mapsto\dfrac{1}{1+x}$ est bornée sur $[0;1[$.

Par contre, série $\sum a_n = \sum (-1)^n$ diverge, donc :

$$\boxed{\text{Le résultat ne subsiste pas quand les } a_n \text{ sont de signe quelconque.}}$$

2) a. Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Commençons par remarquer que la série $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)}$ converge absolument , avec :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = S \ .$$

La série entière $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et converge alors normalement sur $[-1;1]$ et sa somme est continue sur ce segment, d'où :

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S \ .$$

Posons $b_n = a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (Rx)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k \ .$$

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1, $\sum a_n (Rx)^n$ converge pour $|Rx| < R$, soit $|x| < 1$ et diverge pour $|Rx| > R$, soit $|x| > 1$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n (Rx)^n$ est 1 et ainsi, celui de $\sum b_n x^n$ est aussi égal à 1. De plus, on a :

$$\sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} \left(a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)} \right) = \sum_{n\geq 0} a_n R^n - \sum_{n\geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S - S = 0 .$$

Et enfin, si on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on a pour tout $x \in]-1;1[$, $g(x) = f(Rx) - \sum_{k=0}^{n} \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k$ et, comme $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = S$, on a :

$$\lim_{x\to R^-} f(x) = S \iff \lim_{x\to 1^-} f(Rx) = S \iff \lim_{x\to 1^-} \left(f(Rx) - \sum_{k=0}^{n} \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k \right) = S \iff \lim_{x\to 1^-} g(x) = 0 .$$

Finalement, on a $\lim_{x\to R^-} f(x) = S$ si et seulement si $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n\geq 0} b_n x^n = 0$ où rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est 1 et $\sum_{n\geq 0} b_n = 0$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{On peut se ramener au cas où } R = 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0 .}$$

b. Pour tout $x \in]0;1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=1}^{N} S_{n-1} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_n x^{n+1} + S_N x^{N+1}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N}(S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n(x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}}$$

c. Soit $x \in \,]0;1[$. On a :

- $S_N = \sum_{k=0}^{N} a_k \xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$, donc $S_N x^{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n - S_{n-1} = a_n$, donc $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N}(S_n - S_{n-1})x^n = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$;
- pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} S_n(x^n - x^{n+1}) = (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n$.

La relation de la question précédente permet de conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ et existe et que pour tout $x \in \,]0;1[$:

$$\boxed{f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}$$

On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|S_n| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in \,]0;1[$ et tout entier $n > N$:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |S_n| x^n \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{1-x}.$$

Donc :

$$|f(x)| = (1-x)\left|\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right| = (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right| \leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + (1-x)\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n\right| \leq \left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| + \varepsilon.$$

Et la fonction $x \mapsto (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 1, donc :

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n = 0.$$

Alors, il existe $\alpha \in \,]0;1[$ tel que pour tout $x \in \,]1-\alpha;1[$, on a $\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right| \leq \varepsilon$ et finalement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \alpha \in \,]0;1[,\ \forall x \in \,]1-\alpha;1[,\ |f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$$

Exercice 6

1) a. Remarquons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = a_0 c_n + \sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k} = c_n + \sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k}$, donc :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k} = -a_1 c_{n-1} - a_2 c_{n-2} - \ldots - a_{n-1} c_1 - a_n c_0 .$$

Comme $c_0 = 1$, la suite est définie de manière unique par récurrence (forte : un terme dépend de tous les précédents). Ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien une unique suite } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que } c_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = 0.}$$

b. Si $r \in \left]0;R\right[$, la série $\sum a_n r^n$ converge, donc $a_n r^n \to 0$. Or, toute suite convergente est bornée, donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } M > 0 \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left|a_n r^n\right| \le M .}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant définie par récurrence forte, prouvons l'inégalité voulue par récurrence forte.

Au rang $n = 1$, on a $c_1 = -a_1 c_0 = -a_1$, donc, avec $\left|a_1 r^1\right| \le M$, on a :

$$\left|c_1\right| = \left|a_1\right| \le \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1} .$$

L'inégalité est vraie au rang $n = 1$.

Supposons l'inégalité vraie jusqu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\left|c_{n+1}\right| = \left|-\sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k}\right| \le \sum_{k=1}^{n+1} \left|a_k\right| \left|c_{n+1-k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|a_k\right| \left|c_{n+1-k}\right| + \left|a_{n+1}\right| \left|c_0\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|a_k\right| \left|c_{n+1-k}\right| + \left|a_{n+1}\right| .$$

Or, $\left|a_{n+1}\right| \le \dfrac{M}{r^{n+1}}$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\left|a_k\right| \le \dfrac{M}{r^k}$ et, $n+1-k \in [\![1,n]\!]$, donc par hypothèse de récurrence, on a $\left|c_{n+1-k}\right| \le \dfrac{M(M+1)^{n+1-k-1}}{r^{n+1-k}} \dfrac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}}$. Ainsi :

$$\left|c_{n+1}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} .$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (M+1)^{n-k} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (M+1)^k + \frac{M}{r^{n+1}} \\ &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \frac{(M+1)^n - 1}{(M+1)-1} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}}\left[(M+1)^n - 1\right] + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}\end{aligned}$$

Donc $\left|c_{n+1}\right| \le \dfrac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}$ et l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|c_n\right| \le \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.}$$

c. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|c_n\left(\dfrac{r}{M+1}\right)^n\right|\leq\dfrac{M}{M+1}$. Donc la suite $\left(c_n\left(\dfrac{r}{M+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui prouve que la série entière $\sum c_nx^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{r}{M+1}>0$, donc :

$$\boxed{\sum c_nx^n \text{ a un rayon de convergence non nul.}}$$

Si on appelle $R"$ le rayon de convergence de $h(x)=\sum c_nx^n$ et $\rho=\min\left(R,R"\right)$, on a pour tout $x\in\,]-\rho;\rho[$:

$$f(x)h(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}\right)x^n=a_0c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}0x^n=1.$$

Donc, $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ sur $]-\rho;\rho[$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{f} \text{ est développable en série entière au voisinage de 0.}}$$

2) On a $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ avec $R'=1$, donc g est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ avec $g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nb_nx^{n-1}$.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n>0$, on a $g'(x)>0$ sur $]0;1[$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

Si g est bornée sur $]0;1[$, alors on se retrouve dans la situation de la question 1 de l'exercice 4, donc $\sum b_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, g est croissante et non bornée sur $]0;1[$ donc :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}g(x)=+\infty}$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell\in\mathbb{R}$, alors pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on a, avec $b_n>0$:

$$\ell-\varepsilon\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\ell+\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad (\ell-\varepsilon)b_n\leq a_n\leq(\ell+\varepsilon)b_n.$$

Alors, pour tout $x\in\,]0;1[$ et tout entier $n>N$:

$$\sum_{k=N+1}^{n}(\ell-\varepsilon)b_kx^k\leq\sum_{k=N+1}^{n}a_kx^k\leq\sum_{k=N+1}^{n}(\ell+\varepsilon)b_kx^k \quad\Leftrightarrow\quad (\ell-\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n}b_kx^k\leq\sum_{k=N+1}^{n}a_kx^k\leq(\ell+\varepsilon)\sum_{k=N+1}^{n}b_kx^k.$$

Soit en passant à la limite quand $n\to+\infty$, pour tout $x\in\,]0;1[$:

$$(\ell-\varepsilon)\left(g(x)-g_N(x)\right)\leq f(x)-f_N(x)\leq(\ell+\varepsilon)\left(g(x)-g_N(x)\right).$$

avec $f_N(x)=\sum_{k=0}^{N}a_kx^k$ et $g_N(x)=\sum_{k=0}^{N}b_kx^k$.

Comme $g(x)>0$ sur $]0;1[$, on a, pour tout $x\in\,]0;1[$:

$$\ell-\varepsilon+\frac{f_N(x)-(\ell-\varepsilon)g_N(x)}{g(x)}\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq\ell+\varepsilon+\frac{f_N(x)-(\ell+\varepsilon)g_N(x)}{g(x)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[f_N(x)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(x)\right]=f_N(1)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(1)$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f_N(x)-(\ell\pm\varepsilon)g_N(x)}{g(x)}=0$ et ainsi, il existe $\alpha\in\,]0;1[$ tel que pour tout $x\in\,]1-\alpha;1[$, on a :

$$-\varepsilon\le\frac{f_N(x)-(\ell-\varepsilon)g_N(x)}{g(x)}\le\varepsilon \text{ et } -\varepsilon\le\frac{f_N(x)-(\ell+\varepsilon)g_N(x)}{g(x)}\le\varepsilon.$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe $\alpha\in\,]0;1[$ tel que pour tout $x\in\,]1-\alpha;1[$, on a :

$$\ell-2\varepsilon\le\frac{f(x)}{g(x)}\le\ell+2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell}$$

Exercice 8

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\dfrac{\dfrac{(2n+3)!}{\left((n+1)!\right)^2}x^{2(n+1)}}{\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}}=\dfrac{2(2n+3)}{n+1}x^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}4x^2$, donc, d'après la règle de d'Alembert, si $4x^2<1$, soit $|x|<\dfrac{1}{2}$, la série $\sum\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}$ converge et si $4x^2>1$, $|x|>\dfrac{1}{2}$, elle diverge.

Le rayon de convergence de $\sum\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}$ est $R=\dfrac{1}{2}$.

Pour tout réel α non nul, la série entière $\sum(-1)^n\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et a pour somme $(1-x)^\alpha$. En prenant $\alpha=-\dfrac{3}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)&=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)...\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)=(-1)^n\frac{3\times5\times...\times(2n+1)}{2^n}\\&=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{2^n\times2\times4\times...\times(2n)}=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!}\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x\in\left]-1,1\right[$:

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(\frac{x}{4}\right)^n=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Alors, pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$, on a $4x^2\in\left]-1,1\right[$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\left(\frac{4x^2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}=\frac{1}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de }\sum\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}\text{ est }R=\frac{1}{2}\text{ et sa somme est }x\mapsto\frac{1}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}.}$$

Exercice 9

1) Comme $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$ et donc, pour tout réel x tel que $|x|>1$, la suite $(x^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc la série $\sum x^{p_n}$ diverge grossièrement.

Si maintenant $x\in\left]-1,1\right[$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} {p_n}^2 x^{p_n} = \lim\limits_{N\to+\infty} N^2x^N = 0$, donc $x^{p_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{{p_n}^2}\right)$.

Or, $n = \underset{n\to+\infty}{o}(p_n)$, donc $\dfrac{1}{{p_n}^2} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et ainsi, $x^{p_n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum\dfrac{1}{n^2}$, la série $\sum x^{p_n}$ converge.

Finalement :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum x^{p_n} \text{ est 1.}}$$

2) Pour tous $x,x'\in\left]0,1\right[$ tels que $x<x'$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x^{p_n}\le x'^{p_n}$ (avec égalité seulement dans le cas où $n=0$ et $p_0=0$), donc $\sum\limits_{n\ge2} x^{p_n} \le \sum\limits_{n\ge2} x'^{p_n}$ et comme $x^{p_0}\le x'^{p_0}$ et $x^{p_1}<x'^{p_1}$ (l'inégalité est stricte car $p_1>p_0\ge0$, donc $p_1\ne0$), on obtient $f(x)<f(x')$ et donc f est strictement croissante sur $\left]0,1\right[$.

Supposons que f est majorée sur cet intervalle, Alors on a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = L = \sup\limits_{]0,1[} f\in\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\left]0,1\right[$, $f(x)\le L$. Or, pour tout $x\in\left]0,1\right[$ et tout $N\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} x^{p_n} \le \sum\limits_{n\ge0} x^{p_n} = f(x)$, donc :

$$\sum_{n=0}^{N} x^{p_n} \le L.$$

En faisant tendre x vers 1, on obtient $N+1\le L$ et ceci pour tout $N\in\mathbb{N}$, ce qui est absurde.

Ainsi, f n'est pas majorée sur $\left]0,1\right[$ et comme elle est croissante :

$$\boxed{\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty}$$

3) On a $n = \underset{n\to+\infty}{o}(p_n)$, donc pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\ge N$, $n\le\varepsilon p_n$.

Alors, $p_n\ge\dfrac{n}{\varepsilon}$ et pour tout $x\in\left]0,1\right[$, $x^{p_n}\le x^{n/\varepsilon}$, donc $\sum\limits_{n\ge N} x^{p_n} \le \sum\limits_{n\ge N} x^{n/\varepsilon} = \sum\limits_{n\ge N} (x^{1/\varepsilon})^n = x^{N/\varepsilon}\dfrac{1}{1-x^{1/\varepsilon}} \le \dfrac{1}{1-x^{1/\varepsilon}}$ et :

$$0\le(1-x)f(x)\le(1-x)Q(x)+\frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}}$$

avec $Q(x)=\sum\limits_{n=0}^{N} x^{p_n}$.

La fonction $t\mapsto t^{1/\varepsilon}$ est dérivable sur $[x,1]$, de dérivée $t\mapsto\dfrac{1}{\varepsilon}t^{1/\varepsilon-1}$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $t_x\in[x,1]$ tel que $\dfrac{x^{1/\varepsilon}-1^{1/\varepsilon}}{x-1} = \dfrac{1}{\varepsilon}{t_x}^{1/\varepsilon-1}$, soit $\dfrac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} = \varepsilon\,{t_x}^{1-1/\varepsilon}$.

On a $t_x \in [x,1]$, donc $\lim\limits_{x\to 1} t_x = 1$.

Alors, $\lim\limits_{x\to 1} t_x^{1-1/\varepsilon} = 1$ et il existe $\alpha_1 \in \left]0,1\right[$ tel que pour tout $x \in \left]\alpha_1, 1\right[$, $t_x^{1-1/\varepsilon} \leq \dfrac{3}{2}$.

De plus, Q est une fonction polynomiale, donc $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)Q(x) = 0$ et il existe $\alpha_2 \in \left]0,1\right[$ tel que pour tout $x \in \left]\alpha_2, 1\right[$, on a $(1-x)Q(x) \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon$.

Alors, en posant $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) \in \left]0,1\right[$, on a pour tout $x \in \left]\alpha, 1\right[$:

$$0 \leq (1-x)f(x) \leq (1-x)Q(x) + \varepsilon t_x^{1-1/\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{2}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0}$$