

Corrigés des TD du chapitre 9

Exercice 1

Il est clair que si $k = f'(a)$ alors $c = a$ convient et si $k = f'(b)$, alors $c = b$ convient.

On considère maintenant k tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

- Supposons $k = 0$. On a donc $f'(a) < 0 < f'(b)$.

La fonction f est dérivable sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$ et comme $[a, b]$ est un segment, f admet un minimum atteint en $c \in [a, b]$.

Mais $f'(a) < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Ceci implique que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$, soit $f(x) < f(a)$, au voisinage de a^+ donc que le minimum de f n'est pas atteint en a et $c \neq a$.

De même avec $f'(b) > 0$, on prouve que $c \neq b$.

Ainsi, f atteint un minimum en $c \in]a, b[$ donc f' s'annule (et change de signe) en c .

- Supposons k quelconque tel que $f'(a) < k < f'(b)$.

Posons $g(x) = f(x) - kx$.

La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ et $g'(x) = f'(x) - k$ donc $g'(a) < 0 < g'(b)$. Ainsi, g vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui revient à $f'(c) = k$.

Finalement, pour tout $k \in [f'(a), f'(b)]$:

Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = k$.

Exercice 2

1) On a $[x_{n+1}, x_n] \subset]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc f est de classe C^1 sur $[x_{n+1}, x_n]$ et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe $c_n \in]x_{n+1}, x_n[$ tel que $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$ et donc :

$$\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = |f'(c_n)| \leq M.$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M |x_{n+1} - x_n|$$

Soient maintenant $n, p \in \mathbb{N}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq M |x_{k+1} - x_k| = M \left| \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right| = \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Et si $n \geq 1$:

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| = \left| \sum_{k=p}^{n+p-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} = \frac{M}{2^{p+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2^p} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand $n=0$, on a bien pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|f(x_{n+p}) - f(x_p)| \leq \frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant $p=0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n) - f(1)| \leq M \Rightarrow f(1) - M \leq f(x_n) \leq f(1) + M.$$

Ainsi :

La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{k \geq n} f(x_k)$ est bien défini car $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée et $u_n = \max(f(x_n), u_{n+1})$, donc :

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi et donc :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie L .

4) En intervertissant n et p dans le résultat de la question 1, on a pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$.

On peut récrire cela sous la forme : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \geq n$, $|f(x_k) - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$.

En passant au sup sur $k \geq n$, on obtient :

$$\left| \sup_{k \geq n} f(x_k) - f(x_n) \right| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|u_n - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|L - f(x_n)| = |L - u_n + u_n - f(x_n)| \leq |L - u_n| + |u_n - f(x_n)| \leq |L - u_n| + \frac{M}{2^n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(|L - u_n| + \frac{M}{2^n} \right) = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L}$$

5) Pour tout $x \in]0, 1]$, il existe un unique $N_x \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \frac{1}{2^{N_x}}$: $N_x = E\left(-\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$.

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe $c_x \in \left]x, \frac{1}{2^{N_x}}\right[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_{N_x})}{x - x_{N_x}} = f'(c_x) \Rightarrow |f(x) - f(x_{N_x})| = |f'(c_x)| |x - x_{N_x}| \leq |f'(c_x)| |x_{N_x+1} - x_{N_x}| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f(x_{N_x})| + |f(x_{N_x}) - L| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L|.$$

Or, quand $x \rightarrow 0^+$, $N_x \rightarrow +\infty$ donc $f(x_{N_x}) \rightarrow L$ et $\frac{M}{2^{N_x+1}} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L| \right) = 0$, ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L}$$

Exercice 3

1) Posons $g(x) = \|f(x)\|^2$. Comme f est deux fois dérivable sur I , g l'est aussi avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right].$$

Or, $\|f\|$ est constante, donc g aussi et ainsi, $g' = g'' = 0$, donc pour tout $x \in I$:

$$g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right] = 0 \Rightarrow (f''(x) | f(x)) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } (f | f'') \text{ est à valeurs négatives.}}$$

Interprétation cinématique :

Si on pose $f(t) = \overline{OM}$, $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = f'(t)$ est la vitesse et $\vec{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = f''(t)$ est l'accélération du mobile M .

Si $\|f(t)\| = OM = cste$, le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a $\overline{OM} \cdot \vec{v} = 0$, le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et $\overline{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$ indique que la composante colinéaire à \overline{OM} de l'accélération \vec{a} est de sens contraire au vecteur \overline{OM} : cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$, définie sur I et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Comme f est dérivable sur I , $x \mapsto \|f(x)\|^2$ l'est aussi de dérivée $x \mapsto 2(f'(x) | f(x))$. Alors, g est dérivable sur I , avec pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{-2kx} - 2k \|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\left((f'(x) | f(x)) - k \|f(x)\|^2\right) e^{-2kx}.$$

Or, on a $\|f'(x)\| \leq k \|f(x)\|$ et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$(f'(x) | f(x)) \leq \|f'(x)\| \cdot \|f(x)\| \leq k \|f(x)\|^2 \Rightarrow -k \|f(x)\|^2 \leq (f'(x) | f(x)) \leq k \|f(x)\|^2 \quad (1).$$

Donc, $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante sur I .

Si f s'annule en un point $a \in I$, alors $g(a) = \|f(a)\|^2 e^{-2ka} = 0$ et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \geq a$, on a $g(x) \leq g(a) = 0$ et comme g est positive, on obtient $g(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \geq a.$$

Pour montrer que g est nulle à gauche de a aussi, la double inégalité (1), nous invite à considérer la fonction $h: x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$, qui comme g , est positive et dérivable sur I , avec pour tout $x \in I$:

$$h'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{2kx} + 2k \|f(x)\|^2 e^{2kx} = 2((f'(x) | f(x)) + k \|f(x)\|^2) e^{2kx}.$$

Grâce à (1), on a $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur I et ainsi, pour tout $x \in I$ tel que $x \leq a$, $h(x) \leq h(a) = 0$, ce qui donne $h(x) = 0$ et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \leq a.$$

Finalement, on a $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et ainsi :

Si la fonction f s'annule en un point de I , alors elle est nulle sur I .

Exercice 4

1) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] \right) = \ell$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Or, $k \in]0, 1[$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 < k^i \leq 1$ (égal à 1 pour $i = 0$) et pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, on a :

$$0 < |t| \leq \alpha \Rightarrow 0 < |k^i t| \leq k^i \alpha \leq \alpha \Rightarrow \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\left\| \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon k^i = \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell = \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell.$$

Avec $\sum_{i=0}^{p-1} k^i = \frac{1-k^p}{1-k}$, on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \frac{1-k^p}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1-k^p}{1-k} \varepsilon.$$

Or, $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, donc en passant à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit p), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1}{1-k} \varepsilon.$$

Ainsi, avec $K = \frac{1}{1-k} > 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] = \frac{1}{1-k} \ell$ et donc que :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{1-k} \ell.$$

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé du plan d'origine O . Dans chaque cas, on appelle \mathcal{C} la courbe que l'on étudie.

a. $\mathcal{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = 3 \cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π -périodiques sur \mathbb{R} . La courbe \mathcal{C} est entièrement décrite quand t décrit $[-\pi, \pi]$.

- Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $[0, \pi]$.
- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $\pi - t \in [0, \pi]$, et on a $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, donc \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et on peut l'étudier sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a alors pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -3 \sin t + 3 \sin 3t = 6 \sin t \cos 2t \\ y'(t) = 3 \cos t - 3 \cos 3t = 6 \sin t \sin 2t \end{cases}$$

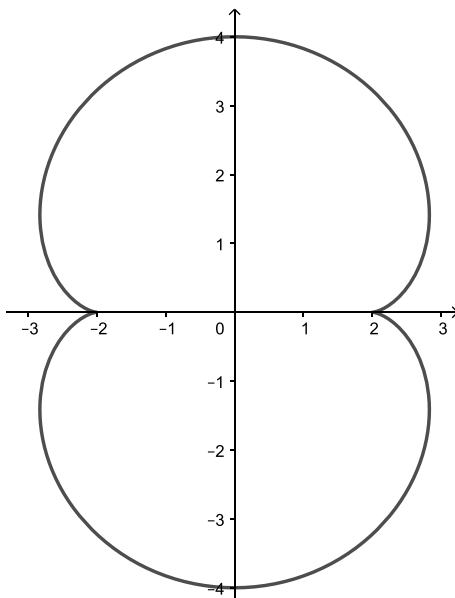
D'où le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	+	0
x	2	$2\sqrt{2}$	0
y	0	$3\sqrt{2}$	4
$y'(t)$	0	+	0

Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = \frac{\pi}{4}$, une tangente horizontale quand $t = \frac{\pi}{2}$ et $M(0)$, de coordonnées $(2;0)$, est un point de rebroussement de première espèce, avec une demi-tangente horizontale.

Courbe :



$$\text{b. } \mathcal{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = t^3 - 2t + \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 - t + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 - 2 - \frac{1}{t^2} = \frac{3t^4 - 2t^2 - 1}{t^2} = \frac{(3t^2 + 1)(t^2 - 1)}{t^2} \\ y'(t) = 2t - 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3 - t^2 - 1}{t^2} = \frac{(2t^2 + t + 1)(t - 1)}{t^2} \end{cases}$$

D'où le tableau :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$+$
x	$-\infty$	\nearrow	0	\searrow	$-\infty$
y	$+\infty$	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	-4	$-$	$+$

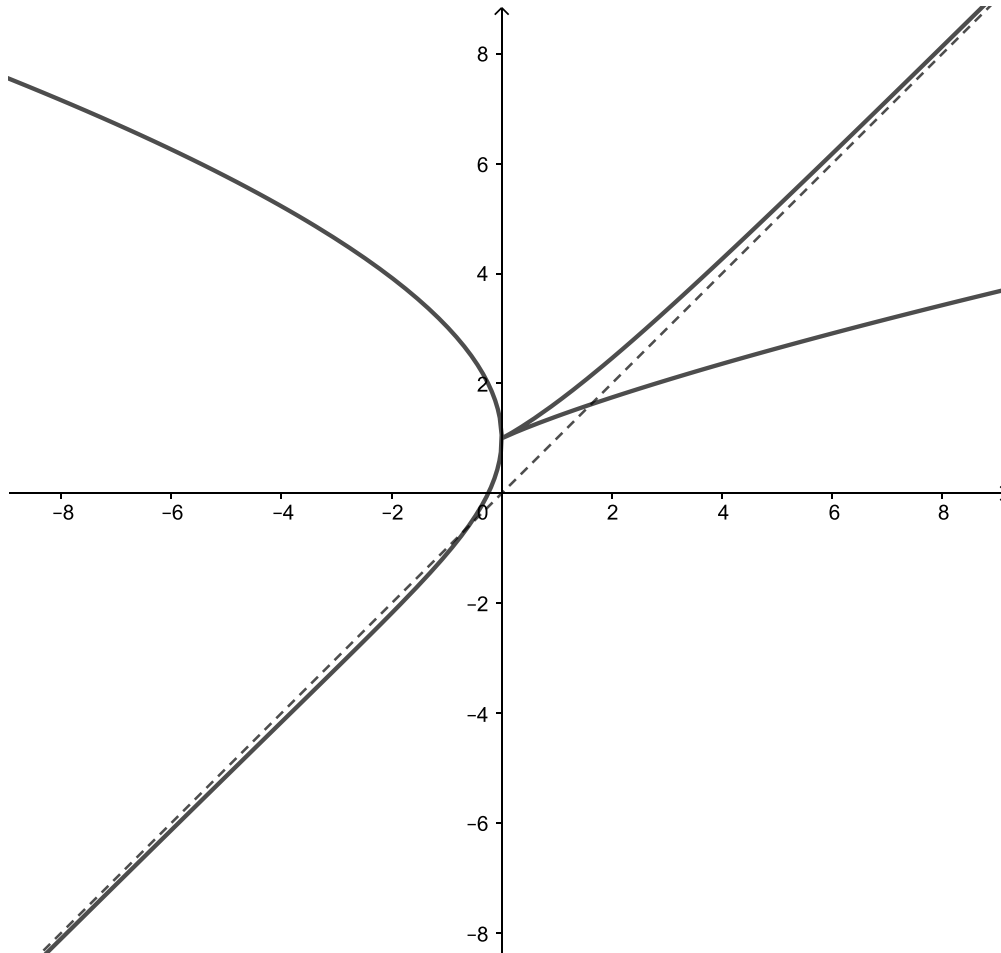
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} (3t^2 + 1)(t + 1) \\ 2t^2 + t + 1 \end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = -1$ et $M(1)$, de coordonnées $(0;1)$, est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(2;1)$.

Branches infinies : Il y en a 4.

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, donc il y a une direction asymptotique horizontale quand $t \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$.
- $\lim_{t \rightarrow 0} [y(t) - x(t)] = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice) est asymptote à \mathcal{C} quand $t \rightarrow 0^-$ et $t \rightarrow 0^+$.

Courbe :



$$c. \mathcal{C} : M(t) \begin{cases} x(t) = \cos^2 t + \ln(\sin t) \\ y(t) = \sin t \cos t \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π -périodiques sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$.

La courbe \mathcal{C} est entièrement décrite quand t décrit $]0, \pi[$.

Pour tout $t \in]0, \pi[$, $\pi - t \in]0, \pi[$, et on a $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, donc \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On a alors pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -2 \sin t \cos t + \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t} \cos 2t \\ y'(t) = \cos 2t \end{cases}$$

D'où le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	$+\infty$	+	0
x	$-\infty$	$(1-\ln 2)/2$	0
y	0	$1/2$	0
$y'(t)$	1	+	0
			+
			-1

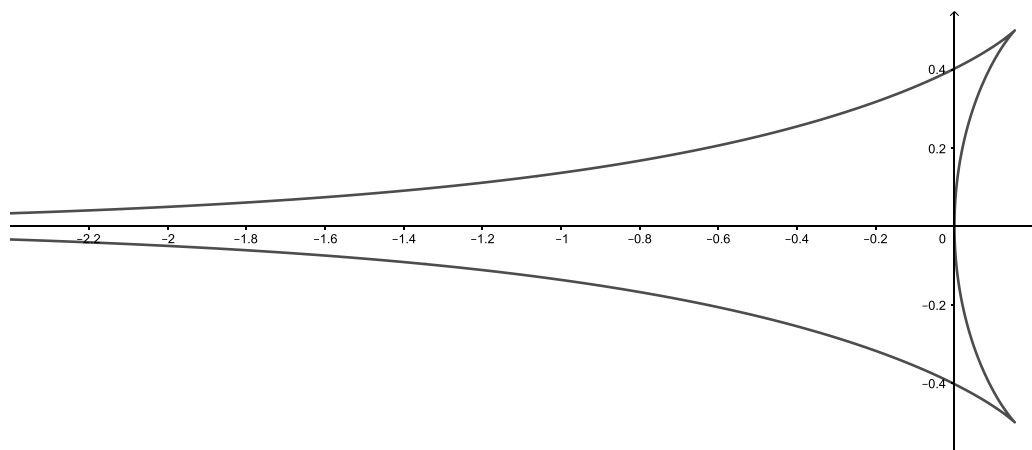
Tangentes particulières :

La tangente est toujours dirigée par $\vec{u} \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \end{vmatrix}$. Il y a une tangente verticale quand $t = \frac{\pi}{2}$ et $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, de coordonnées $\left(\frac{1-\ln 2}{2}; \frac{1}{2}\right)$, est un point de rebroussement de première espèce, avec une demi-tangente dirigée par $\vec{u}(1;1)$.

Branche infinie :

On a $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$, donc l'axe (Ox) est asymptote à \mathcal{C} quand $t \rightarrow 0^+$.

Courbe :



Exercice 6

1) Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies et de classe C^∞ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = 2(t-1) \\ y'(t) = 6t(t-1) \end{cases}$$

La tangente à Γ au point $M(t)$ est dirigée par $\vec{u}(t)$ de coordonnées $(1, 3t)$. Une équation de cette tangente est alors donnée par :

$$\begin{vmatrix} x-x(t) & 1 \\ y-y(t) & 3t \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3t(x-x(t)) - (y-y(t)) = 0 \Leftrightarrow 3tx - y = t^3 - 3t^2.$$

Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Les tangentes à Γ en $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}(t_1) \perp \vec{u}(t_2)$, soit :

$$\vec{u}(t_1) \cdot \vec{u}(t_2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 9t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow t_2 = -\frac{1}{9t_1} \text{ avec } t_1 \neq 0.$$

Et si $N(x_N, y_N)$ est le point d'intersection des deux tangentes, (x_N, y_N) est solution du système :

$$\begin{cases} 3t_1x_N - y_N = t_1^3 - 3t_1^2 \\ 3t_2x_N - y_N = t_2^3 - 3t_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(t_2 - t_1)x_N = t_2^3 - t_1^3 - 3t_2^2 + 3t_1^2 = (t_2 - t_1)(t_2^2 + t_1t_2 + t_1^2 - 3t_2 - 3t_1) \\ y_N = 3t_1x_N - t_1^3 + 3t_1^2 \end{cases}$$

Pour avoir deux tangentes, il faut bien entendu que $t_2 \neq t_1$, donc avec $t_2 = -\frac{1}{9t_1}$, on obtient :

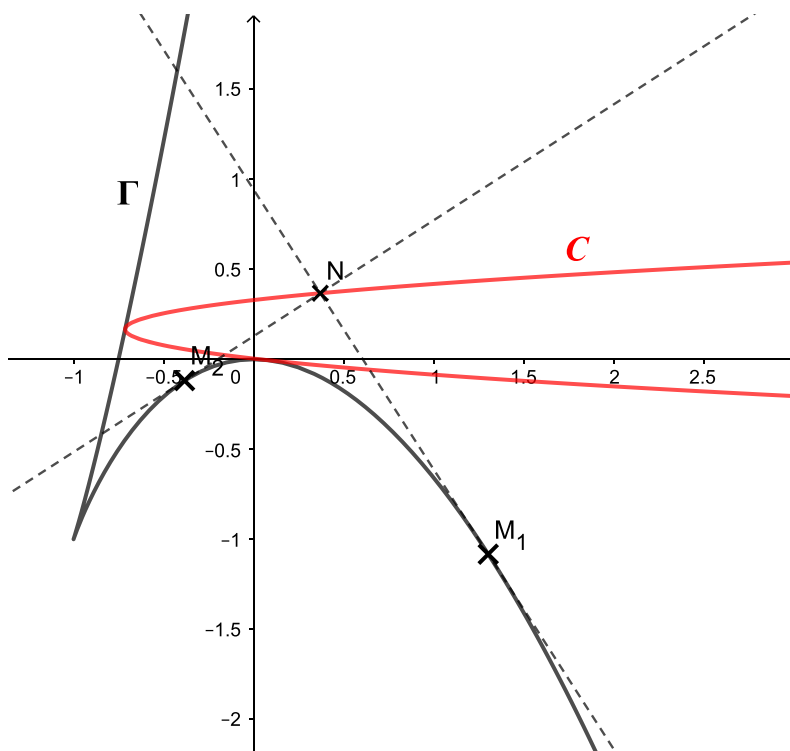
$$\begin{cases} x_N = \frac{1}{3}(t_2^2 + t_1t_2 + t_1^2 - 3t_2 - 3t_1) = \frac{1}{3}\left(t_1^2 - 3t_1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3t_1} + \frac{1}{81t_1^2}\right) \\ y_N = -\frac{1}{9}t_1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{81t_1} \end{cases}$$

Ainsi :

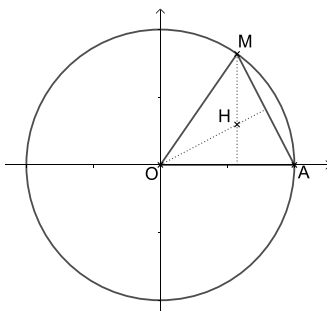
La courbe C est paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}\left(t^2 - 3t - \frac{1}{9} + \frac{1}{3t} + \frac{1}{81t^2}\right) \\ y(t) = -\frac{1}{9}t + \frac{1}{3} + \frac{1}{81t} \end{cases}$$

On obtient les courbes :



2) Quitte à modifier le repère, on peut supposer que O est le centre et A le point de coordonnées $(a; 0)$.



Posons $t = (\overline{OA}, \overline{OM})$, donc $M(a \cos t, a \sin t)$ et notons $H(x(t), y(t))$ l'orthocentre de OAM .

Remarquons que si $M = A$ ou A' (où A' est le point diamétralement opposé à A sur \mathcal{C}), le triangle est aplati et H n'est pas défini. Donc, on suppose $M \neq A$ et A' , donc $t \neq 0$ [π] (et $\sin t \neq 0$).

On a alors :

- $(OH) \perp (AM)$ donc $\overline{OH} \cdot \overline{AM} = x(t)(a \cos t - a) + y(t)(a \sin t) = 0$, soit : $x(t) \cos t + y(t) \sin t = x$.
- $(AH) \perp (OM)$ donc $\overline{AH} \cdot \overline{OM} = (x(t) - a)a \cos t + y(t)a \sin t = 0$, soit : $x(t) \cos t + y(t) \sin t = a \cos t$.

On obtient alors :

$$\begin{cases} x(t) \cos t + y(t) \sin t = x \\ x(t) \cos t + y(t) \sin t = a \cos t \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = \frac{a(1 - \cos t) \cos t}{\sin t} \end{cases}$$

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont définies, de classe C^∞ et 2π -périodiques sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La courbe est entièrement décrite quand t décrit $] -\pi, 0[\cup] 0, \pi[$.

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement paire et impaire, donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox) et on peut l'étudier sur $] 0, \pi[$. Alors, pour tout $t \in] 0, \pi[$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = a(1 - \cos t) \frac{\cos^2 t + \cos t - 1}{\sin^2 t} \end{cases}$$

Les racines de $X^2 + X - 1$ sont $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,6$.

En posant $t_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, on a :

$$y(t) = a \frac{1 - \cos t}{\sin^2 t} \left(\cos t + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) (\cos t - \cos t_0).$$

On obtient le tableau :

t	0	t_0	π
$x'(t)$		-	
x	a	→	
y	0	$y(t_0)$	$-\infty$
$y'(t)$	+	0	-

On a :

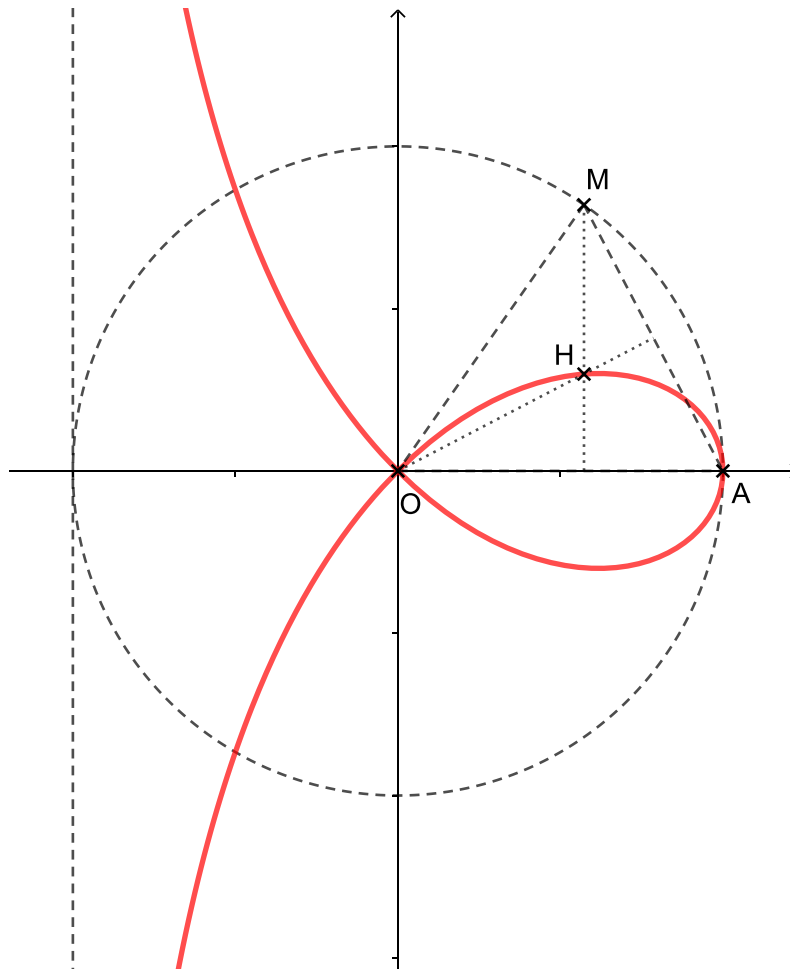
$$y(t) = a \cos t \frac{1 - \cos t}{\sin t} = a \cos t \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t + o(t^2)} = a \cos t \frac{t/2 + o(t)}{1 + o(t)} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0.$$

Comme $x(0) = a$, la courbe peut être prolongée au point $(a, 0)$ quand $t \rightarrow 0$.

Enfin :

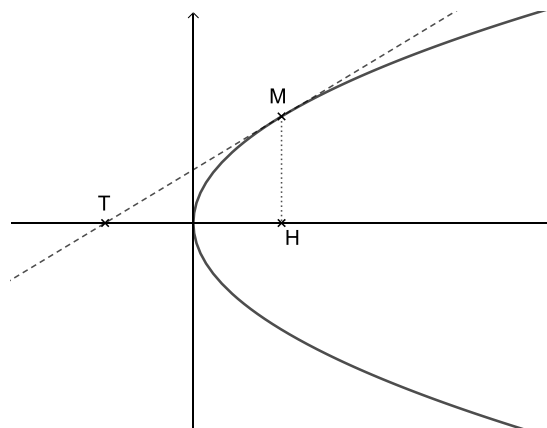
- En $t = 0$, $x'(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} y'(t) = a \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2/2 + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{a}{2}$: il y a une tangente verticale.
- En $t = t_0$, il y a une tangente horizontale.
- Quand $t \rightarrow \pi$, il y a une asymptote verticale d'équation $x = -a$.

On obtient la courbe (en rouge) :



Exercice 7

Pour fixer les idées, voici un schéma dans le cas où \mathcal{C} est une parabole.



Notons $(x(t), y(t))$ les coordonnées de M , où t est un paramètre, décrivant un intervalle I de \mathbb{R} .

Comme \mathcal{C} est régulière, les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables sur I , et x' et y' ne s'annulent pas en même temps.

La tangente à \mathcal{C} en M a pour équation $(x - x(t))y'(t) - (y - y(t))x'(t) = 0$, donc x_T , l'abscisse de T (qui est d'ordonnée nulle), vérifie :

$$y'(t)x_T = x(t)y'(t) - y(t)x'(t).$$

De plus, pour que T soit défini de manière unique, il faut que la tangente ne soit pas horizontale, c'est-à-dire que $y'(t) \neq 0$ et dans ce cas, on obtient :

$$x_T = x(t) - \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}.$$

Ainsi, $T\left(x(t) - \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}; 0\right)$. De plus, on a immédiatement $H(x(t); 0)$, donc :

$$HT = |x_T - x(t)| = \left| \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right|.$$

On a alors :

$$HT = a \Leftrightarrow \left| \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right| = a \Leftrightarrow \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = \pm a.$$

Comme x et y sont de classe C^1 sur I , la fonction $t \mapsto \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}$ est continue, donc ne change de signe que quand elle s'annule. Or, $a \neq 0$, donc $t \mapsto \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)}$ ne s'annule jamais sur I , et ainsi, on a :

$$\left(\forall t \in I, \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = -a \right) \text{ ou } \left(\forall t \in I, \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} = a \right).$$

Remarquons que l'égalité $\left| \frac{y(t)x'(t)}{y'(t)} \right| = a \neq 0$ implique aussi que la fonction y ne s'annule pas sur I et comme elle est continue, elle garde un signe constant. On a alors :

$$\left(\forall t \in I, x'(t) = -a \frac{y'(t)}{y(t)} \right) \text{ ou } \left(\forall t \in I, x'(t) = a \frac{y'(t)}{y(t)} \right).$$

Soit :

$$\left(\forall t \in I, x(t) = -a \ln|y(t)| + c \right) \text{ ou } \left(\forall t \in I, x(t) = a \ln|y(t)| + c \right).$$

Ceci revient à :

$$\left(\forall t \in I, y(t) = Ke^{-\frac{1}{a}x(t)} \right) \text{ ou } \left(\forall t \in I, y(t) = Ke^{\frac{1}{a}x(t)} \right).$$

Les fonctions $x \mapsto e^{x/a}$ et $x \mapsto e^{-x/a}$ étant définies sur \mathbb{R} , on peut conclure que si \mathcal{C} est solution, alors c'est la courbe représentative d'une fonction $x \mapsto Ke^{x/a}$ ou $x \mapsto Ke^{-x/a}$.

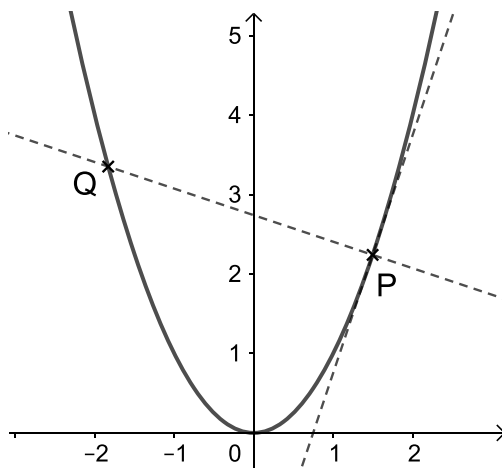
Réciproquement, si \mathcal{C} est paramétrée par $x \mapsto (x, Ke^{x/a})$ avec $x \in \mathbb{R}$ pour paramètre, la courbe est régulière de classe C^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $HT = \left| \frac{Ke^{x/a}}{Ke^{x/a}/a} \right| = a$, donc \mathcal{C} est solution.

Il en va de même pour $x \mapsto (x, Ke^{-x/a})$ et finalement :

Les courbes recherchées sont les courbes représentatives sur \mathbb{R} des fonctions $x \mapsto Ke^{x/a}$ ou $x \mapsto Ke^{-x/a}$ où K est une constante réelle.

Exercice 8

On a le schéma suivant :



La parabole \mathcal{P} est paramétrée par $t \mapsto (t, t^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $P(t, t^2)$ une éventuelle solution du problème (avec $t \in \mathbb{R}^*$ car P est distinct de l'origine du repère).

Du fait de la symétrie de \mathcal{P} par rapport à l'axe des ordonnées, le symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées est aussi solution. On peut donc supposer $t > 0$.

Un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{P} en P est $\vec{u}(1, 2t)$ et si on appelle \mathcal{N} la normale à \mathcal{P} en P , on a :

$$M(x, y) \in \mathcal{N} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow x - t + 2t(y - t^2) = 0.$$

Comme $Q(x_Q, y_Q) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{N}$ et $Q \neq P$, on a :

$$\begin{cases} x_Q - t + 2t(y_Q - t^2) = 0 \\ y_Q = x_Q^2 \\ x_Q \neq t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q - t + 2t(x_Q^2 - t^2) = 0 \\ y_Q = x_Q^2 \\ x_Q \neq t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2t(x_Q + t) = 0 \\ y_Q = x_Q^2 \\ x_Q \neq t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = -t - \frac{1}{2t} \\ y_Q = \left(t + \frac{1}{2t}\right)^2 \end{cases}$$

La longueur de l'arc PQ de la parabole est alors donnée par :

$$L(t) = \int_{-t-\frac{1}{2t}}^t \sqrt{1+4u^2} \, du = F(t) - F\left(-t - \frac{1}{2t}\right)$$

avec $F : t \mapsto \int_0^t \sqrt{1+4u^2} \, du$.

La fonction F est une primitive de $t \mapsto \sqrt{1+4t^2}$, donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Comme $t \mapsto -t - \frac{1}{2t}$ l'est aussi, L est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que différence de telles fonctions et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} L'(t) &= F'(t) - \left(-1 + \frac{1}{2t^2}\right) F'\left(-t - \frac{1}{2t}\right) = \sqrt{1+4t^2} + \frac{2t^2-1}{2t^2} \sqrt{1+4\left(-t - \frac{1}{2t}\right)^2} \\ &= \sqrt{1+4t^2} + \frac{2t^2-1}{2t^3} \sqrt{4t^4+5t^2+1} = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3} \left[2t^3 + (2t^2-1)\sqrt{t^2+1}\right] \end{aligned}$$

Si $2t^2 - 1 \geq 0$, soit $t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $L'(t) > 0$ et si $2t^2 - 1 < 0$, soit $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a :

$$L'(t) = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3} \frac{(2t^3)^2 - (2t^2 - 1)^2(t^2 + 1)}{2t^3 - (2t^2 - 1)\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t^3} \frac{3t^2 - 1}{2t^3 - (2t^2 - 1)\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Et $L'(t) > 0$ quand $3t^2 - 1 > 0$, soit $t > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Finalement, $L'(t) < 0$ sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et $L'(t) > 0$ sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$, donc L est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ et L est strictement croissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$. Ceci prouve que L admet un minimum en $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans ce cas, $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}\right)$ et

$$\begin{aligned} L\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \int_{-\frac{5}{2\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+4u^2} du \stackrel{u=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t}{=} \int_{\operatorname{argsh}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \frac{1}{2} \operatorname{ch} t dt = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{argsh}\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \operatorname{ch}^2 t dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} [1 + \operatorname{ch}(2t)] dt = \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2t) \right]_{-\operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)}^{\operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \\ &= \operatorname{argsh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \operatorname{argsh}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) + \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{5}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2} \right] = \ln(8 + 3\sqrt{7}) + 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

Finalement :

L'arc de parabole est de longueur minimale en $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}\right)$ et $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}\right)$, et dans ce cas, cette longueur est $\ln(8 + 3\sqrt{7}) + 4\sqrt{7}$.

Exercice 9

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|f(t)| \geq 0$, donc $t \mapsto |f(t)|$ est croissante si et seulement si $t \mapsto |f(t)|^2$ l'est.

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)|^2 = f(t)\bar{f}(t)$ et comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , \bar{f} l'est aussi, ainsi que $g = f\bar{f}$ (en tant que produit de telles fonctions) et :

$$g'(t) = f'(t)\bar{f}(t) + f(t)\bar{f}'(t) = f'(t)\bar{f}(t) + \overline{f'(t)\bar{f}(t)} = 2\operatorname{Re}[f'(t)\bar{f}(t)].$$

Comme f est à images dans \mathbb{C}^* , on a $|f(t)|^2 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc :

$$g'(t) = 2\operatorname{Re}[f'(t)\bar{f}(t)] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Re}[f'(t)\bar{f}(t)]}{|f(t)|^2} \geq 0.$$

Enfin :

$$\frac{\operatorname{Re}[f'(t)\bar{f}(t)]}{|f(t)|^2} = \operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\bar{f}(t)}{|f(t)|^2}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)\bar{f}(t)}{f(t)\bar{f}(t)}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{f'(t)}{f(t)}\right].$$

Et donc :

$$|f| \text{ est croissante} \Leftrightarrow g \text{ est croissante} \Leftrightarrow g'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] \geq 0.$$

Ceci prouve que :

$$t \mapsto |f(t)| \text{ est croissante si et seulement si la partie réelle } \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ est toujours positive.}$$

2) En gardant les notations de la question précédente ($g = |f|^2$), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f'(t)\bar{f}(t) + f(t)\bar{f}'(t)}{f(t)\bar{f}(t)} = \frac{2\operatorname{Re}[f'(t)\bar{f}(t)]}{f(t)\bar{f}(t)} = 2\operatorname{Re} \left[\frac{f'(t)\bar{f}(t)}{f(t)\bar{f}(t)} \right] = 2\operatorname{Re} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right].$$

$\frac{g'(t)}{g(t)} - 2a$ Or, si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = a \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{Re} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] + i \operatorname{Im} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] \right) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] = a \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{f'(t)}{f(t)} \right] = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g'(t)}{g(t)} = 2a.$$

Comme $-a > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $t \in [A, +\infty[$, $\left| \frac{g'(t)}{g(t)} - 2a \right| \leq -a$, ce qui implique que :

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \leq a.$$

Alors, comme f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , g l'est aussi et pour tout $t \in [A, +\infty[$:

$$\int_A^t \frac{g'(u)}{g(u)} du \leq \int_A^t a du \Leftrightarrow \ln(g(t)) - \ln(g(A)) \leq a(t-A) \Leftrightarrow g(t) \leq K^2 e^{at} \Leftrightarrow |f(t)| \leq K e^{\frac{a}{2}t}$$

avec $K = \sqrt{e^{-aA} g(A)} \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N = E(A) + 1$, $|f(n)| \leq K e^{\frac{a}{2}n} = K(e^{a/2})^n$.

Comme $a < 0$, on a $e^{a/2} \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum K(e^{a/2})^n$ converge et ainsi, $\sum |f(n)|$ converge aussi, et finalement :

La série de terme général $f(n)$ est absolument convergente.

Exercice 10

1) La fonction $f : t \mapsto (a \cos t, b \sin t)$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et 2π -périodique, donc la courbe est entièrement parcourue quand t décrit $[-\pi, \pi]$. On a alors $L = \int_{-\pi}^{\pi} \|f'(t)\| dt$.

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, notons $M(t)$ le point de coordonnées $(a \cos t, b \sin t)$ dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $-t \in [-\pi, \pi]$ et $(a \cos(-t), b \sin(-t)) = (a \cos t, -b \sin t)$, donc $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et \mathcal{E} est symétrique par rapport à (Ox) .

Pour tout $t \in [0, \pi]$, $\pi - t \in [0, \pi]$ et $(a \cos(\pi - t), b \sin(\pi - t)) = (-a \cos t, b \sin t)$, donc $M(\pi - t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et \mathcal{E} est symétrique par rapport à (Oy) .

Ainsi, $L = 4 \int_0^{\pi/2} \|f'(t)\| dt$, soit, $f': t \mapsto (-a \sin t, b \cos t)$:

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt + 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

En posant $u = \frac{\pi}{2} - t$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u} du.$$

Donc $L = 4 \int_0^{\pi/4} g(t) dt$ avec :

$$g(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} + \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

La fonction g est définie et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, avec pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{a^2 \cos t \sin t - b^2 \sin t \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} + \frac{-a^2 \sin t \cos t + b^2 \cos t \sin t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \\ &= (a^2 - b^2) \sin t \cos t \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \right) \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} - \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \right) \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \frac{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t - a^2 \sin^2 t - b^2 \cos^2 t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \frac{(a^2 - b^2)(\cos^2 t - \sin^2 t)}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= \frac{(a^2 - b^2) \sin 2t}{2\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}} \frac{(a^2 - b^2) \cos 2t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ &= \frac{(a^2 - b^2)^2 \sin 4t}{4\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \left(\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} + \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \right)} \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\sin 4t \geq 0$, donc $g'(t) \geq 0$ et g est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Alors, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $g(0) \leq g(t) \leq g\left(\frac{\pi}{4}\right)$, soit :

$$a + b \leq g(t) \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

On a alors $4\int_0^{\pi/4} (a+b) dt \leq 4\int_0^{\pi/4} g(t) dt \leq 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{2(a^2+b^2)} dt$, soit :

$$\boxed{\pi(a+b) \leq L \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}}$$

2) On veut $L = 2\pi a \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\binom{2n}{n} \frac{e^n}{2^{2n}} \right]^2 \right)$. On a :

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (e \cos t)^2} dt.$$

Et $e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \in]0, 1[$, donc pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 < e \cos t < 1$ et :

$$\sqrt{1 - (e \cos t)^2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (e \cos t)^{2n}.$$

De plus, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $f_n(t) = \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (e \cos t)^{2n}$, on a :

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{2n}.$$

Et la série $\sum \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{2n}$ converge (avec $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{2n} = 1 - \sqrt{1 - e^2}$), donc la série de fonctions

$\sum f_n$ converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (e \cos t)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (e \cos t)^{2n} \right] dt = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n+1)} t dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{2n+1} t dt = \left[\sin t \cos^{2n+1} t \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (2n+1) \sin^2 t \cos^{2n} t dt \\ &= (2n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^{2n} t dt = (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt - (2n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n+1)} t dt \\ &= (2n+1) I_n - (2n+1) I_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$ et $I_n = \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \dots \times 2} I_0 = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2}$.

Alors :

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (e \cos t)^2} dt = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} e^n \right]^2 \right).$$

Et finalement :

$$\boxed{L = 2\pi a \left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \left[\binom{2n}{n} \frac{e^n}{2^{2n}} \right]^2 \right)}$$

3) Du fait des symétries vues plus haut, l'aire A de la surface délimitée par \mathcal{E} vaut 4 fois l'aire de la surface comprise entre (Ox) , (Oy) et la partie de \mathcal{E} située dans le quart de plan tel que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Posons $x = a \cos t$ et $y = b \sin t$.

Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ et $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, donc $y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ et :

$$A = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx.$$

En posant $x = a \cos t$ (donc $dx = (-a \sin t)dt$), on obtient :

$$A = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sqrt{1 - \cos^2 t} (-a \sin t) dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi ab - 2ab \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2}.$$

Soit :

$$A = \pi ab$$