

Exercices d'entraînement - Corrigés
Chapitre 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\arctan(n+\alpha) - \arctan n}{(n+\alpha) - n} = \arctan' c_n = \frac{1}{1+c_n^2}$ avec $n \leq c_n \leq n+\alpha$, donc :

$$0 \leq \arctan(n+\alpha) - \arctan n \leq \frac{\alpha}{n^2}.$$

Et $\sum (\arctan(n+\alpha) - \arctan n)$ converge par comparaison à $\sum \frac{\alpha}{n^2}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n + \cos n} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{\cos n}{n} + o\left(\frac{\cos n}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent donc $\sum u_n$.

3) Pour tout entier $k \geq 2$, $\sqrt[k]{3} = e^{\frac{\ln 3}{k}} \leq e^{\frac{\ln 3}{2}} = \sqrt{3} < 2$, donc $u_n > 0$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - \sqrt[k]{3}).$$

Or, $\ln(2 - \sqrt[k]{3}) = \ln\left(2 - e^{\frac{\ln 3}{k}}\right) = \ln\left[2 - \left(1 + \frac{\ln 3}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right] = \ln\left[1 - \frac{\ln 3}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right]$, donc $\ln(2 - \sqrt[k]{3}) \sim -\frac{\ln 3}{k}$.

Comme $\sum \frac{1}{k}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\ln 3 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}\right) = -\infty$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{3n+1} dx = \frac{1}{3n+2}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{3n+2} &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^1 x^{3n+1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n x^{3n+1} \right) dx = \int_0^1 \left(x \sum_{n=0}^N (-x^3)^n \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{1 - (-x^3)^{N+1}}{1 - (-x^3)} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx + (-1)^N \int_0^1 \frac{x^{3N+4}}{1+x^3} dx \end{aligned}$$

Et $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3N+4}}{1+x^3} dx \leq \int_0^1 x^{3N+4} dx = \frac{1}{3N+5}$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{3N+4}}{1+x^3} dx = 0$. Alors, $\sum \frac{(-1)^n}{3n+2}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \frac{3}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{\pi - \ln 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Chapitre 2

1) L'application N est définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Remarquons que $N((x, y)) = N_1((x, x+2y))$ où $N_1((x, y)) = |x| + |y|$.

Soient (x, y) , (x', y') de \mathbb{R}^2 et λ de \mathbb{R} .

$$\bullet \quad N(\lambda(x, y)) = N((\lambda x, \lambda y)) = |\lambda x| + |\lambda x + 2\lambda y| = |\lambda||x| + |\lambda||x + 2y| = |\lambda|(|x| + |x + 2y|) = |\lambda|N((x, y)).$$

Donc, N est homogène.

$$\bullet \quad N((x, y)) = 0 \Leftrightarrow N_1((x, x+2y)) = 0 \Leftrightarrow (x, x+2y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = x+2y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Donc, N est séparée.

$$\bullet \quad N((x, y) + (x', y')) = N((x+x', y+y')) = |x+x'| + |x+x'+2(y+y')| = |x+x'| + |x+2y+x'+2y'| \\ \leq |x| + |x'| + |x+2y| + |x'+2y'| = |x| + |x+2y| + |x'| + |x'+2y'| = N((x, y)) + N((x', y'))$$

Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur \mathbb{R}^2 .

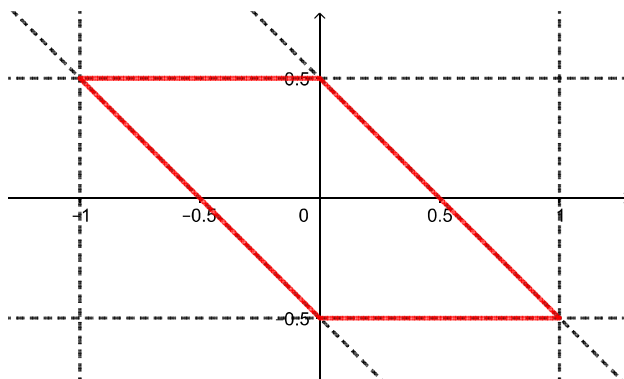
On a $S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, N((x, y)) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |x+2y| = 1\}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$|x| + |x+2y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \geq 0 \\ x+x+2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x+2y \leq 0 \\ x-x-2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \geq 0 \\ -x+x+2y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x+2y \leq 0 \\ -x-x-2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2}x \\ x+y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq -\frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x \\ x+y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \frac{1}{2} - x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ y = -\frac{1}{2} - x \end{cases}$$

On obtient la partie rouge du plan :



2) a. L'application N est définie sur E et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Remarquons que $N(f) = |f(0)| + N_\infty(f')$.

Soient f et g de E , et λ de \mathbb{R} .

$$\bullet \quad N(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |\lambda f'(t)| = |\lambda| \left(|f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \right) = |\lambda| N(f).$$

Donc, N est homogène.

$$\bullet \quad N(f) = 0 \Leftrightarrow |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = 0 \Leftrightarrow |f(0)| = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f = cste \end{cases} \Leftrightarrow f = 0$$

Donc, N est séparée.

$$\bullet \quad N(f + g) = |f(0) + g(0)| + N_\infty(f' + g') \leq |f(0)| + |g(0)| + N_\infty(f') + N_\infty(g') = N(f) + N(g).$$

Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur E .

b. Soit $f \in \overline{B}_N(0,1)$. On a alors $N(f) = |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \leq 1$.

Posons $\sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| = a$ donc pour tout $t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leq a$ et, par croissance de l'intégrale :

$$\left| \int_0^t f'(u) du \right| \leq \int_0^t |f'(u)| du \leq \int_0^t a du \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leq at.$$

Alors, avec $|f(t)| = |f(t) - f(0)| + |f(0)|$, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$|f(t)| \leq |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leq |f(t) - f(0)| + |f(0)| \leq at + |f(0)| \leq a + |f(0)| = N(f) \leq 1.$$

Donc $N_\infty(f) \leq 1$ et $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. Finalement, on a bien :

$$\underline{\overline{B}_N(0,1) \subset \overline{B}_{N_\infty}(0,1)}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto t^n$ appartient à E et :

- $N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_{N_\infty}(0,1)$;
- $N(f) = n$ donc quand $n \geq 2$, $f \notin \overline{B}_N(0,1)$.

Ainsi, l'inclusion réciproque est fautive.

c. Il suffit de considérer $f : t \mapsto t$. On a $N(f) = N_\infty(f) = 1$ donc $f \in \overline{B}_N(0,1)$ et $N_\infty(f) = 1$.

3) a. L'application N est définie sur \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Remarquons que $N(f) = N_1(f_1)$ où $f_1 : t \mapsto (1+t^2)f(t)$ et $N_1(f_1) = \int_0^1 |f_1(t)| dt$.

Soient f et g de E , et λ de \mathbb{R} .

$$\bullet \quad N(\lambda f) = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda f(t)| dt = \int_0^1 (1+t^2) |\lambda| |f(t)| dt = |\lambda| N(f).$$

Donc, N est homogène.

- $N(f) = 0 \Leftrightarrow N_1(f_1) = 0 \Leftrightarrow f_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (car $f_1 = hf$ où $h : t \mapsto 1+t^2$ ne s'annule pas).

Donc, N est séparée.

- $N(f+g) = N_1(f_1+g_1) \leq N_1(f_1) + N_1(g_1) = N(f) + N(g)$.

Donc, N vérifie l'inégalité triangulaire.

Finalement, N est une norme sur E .

b. Soit $f \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$, donc :

$$N(f) = \int_0^1 (1+t^2) |f(t)| dt \leq \int_0^1 (1+t^2) \|f\|_\infty dt = \frac{4}{3} \|f\|_\infty.$$

De plus, pour $f : t \mapsto 1$, qui appartient à E , on a $N(f) = \int_0^1 (1+t^2) dt = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \|f\|_\infty$ (avec $\|f\|_\infty = 1$), donc :

$$\underline{\beta = \frac{4}{3}}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto t^n$ appartient à E , $\|f_n\|_\infty = 1$ et :

$$N(f_n) = \int_0^1 (1+t^2) t^n dt = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+3}.$$

On a $\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la quantité $\frac{N(f)}{\|f\|_\infty}$ n'est pas minorée par un réel $\alpha > 0$ quand f décrit $E \setminus \{0\}$.

Autrement dit, il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f \in E$, $\alpha \|f\|_\infty \leq N(f)$.

4) Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, $A_k^{-1} = (b_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Comme $A_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$ et $A_k^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} B$, on a $a_{i,j}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a_{i,j}$ et $b_{i,j}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} b_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k A_k^{-1} = \left(\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)} b_{\ell,j}^{(k)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)} b_{\ell,j}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} b_{\ell,j}$, donc :

$$\underline{A_k A_k^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} AB}.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k A_k^{-1} = I_n$, donc $A_k A_k^{-1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I_n$ et ainsi $AB = I_n$, autrement dit :

$$\underline{A \text{ est inversible et } A^{-1} = B}.$$

Chapitre 3

1) a. On a $f(a) = 0$ et pour tout $x \in E$, $f(x) \leq \|x - a\|$, donc

$$|f(x) - f(a)| = f(x) \leq \|x - a\|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} \|x - a\| = 0$, on obtient par comparaison, $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$, soit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, autrement dit :

$$\underline{f \text{ est continue en } a.}$$

b. On a $\| -a \| = \|a\|$, donc :

$$f(-a) = \| -a - a \| = 2\|a\|.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} (-\lambda a) = -a$ et si $\lambda > 1$, on a $\| -\lambda a \| = \lambda \|a\| > \|a\|$, donc $f(-\lambda a) = 0$ et :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} f(-\lambda a) = 0 \neq 2\|a\| = f(-a).$$

Ceci prouve que :

$$\underline{f \text{ n'est pas continue en } -a.}$$

2) On note $f : x \mapsto \|x\|_a$. Pour tous $x, y \in E$:

$$\|f(x) - f(y)\| = \| \|x\|_a - \|y\|_a \| = \| \|x\| - \|y\| \| \|a\| \leq \|a\| \|x - y\|.$$

Donc :

$$\underline{x \mapsto \|x\|_a \text{ est } \|a\| \text{-lipschitzienne.}}$$

3) Soit $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de P convergeant vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $M \mapsto M^2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue (les coefficients de M^2 sont polynomiaux en ceux de M), donc $M_k^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M^2$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_k^2 = M_k$ car $M_k \in P$, donc $M_k^2 = M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M$ et ainsi, $M^2 = M$, donc $M \in P$. Ceci prouve que :

$$\underline{P \text{ est une partie fermée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$ pour $n = 2$ (pour $n > 2$, on peut prendre $M_a = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{0}_{2, n-2} \\ \hline \mathbf{0}_{n-2, 2} & I_{n-2} \end{array} \right)$).

Or, $\|M_a\|_\infty = a$ quand $a \geq 1$, donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|M_a\|_\infty = +\infty$, ce qui prouve que :

$$\underline{P \text{ n'est pas partie bornée de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4) a. Remarquons déjà que $x^2 - 2xy + 3y^2 = (x - y)^2 + 2y^2 = 0$ si et seulement si $x - y = y = 0$, donc si et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$. La fonction f est donc bien définie sur \mathbb{R}^2 .

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme quotient de fonction polynomiales.

Soit $D : y = ax$ une droite non verticale passant par l'origine. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x, ax) = \frac{ax}{x^2 - 2ax + 3a^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f(0, 0).$$

Ainsi, la restriction de f à D est continue.

Remarquons que cela fonctionne si $a = 0$, car dans ce cas $f(x, ax) = f(x, 0) = 0$.

La seule droite verticale passant par l'origine est l'axe des ordonnées (Oy), d'équation $x = 0$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$:

$$f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0).$$

Donc, la restriction de f à (Oy) est continue.

Finalement, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x, x^2) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Donc, f n'est pas continue à l'origine.

Chapitre 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dérivable sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en tant que produit de telles fonctions et :

$$g_n'(x) = \cos x \cos^n x - n \sin^2 x \cos^{n-1} x = (n+1) \left[\frac{1}{n+1} - \sin^2 x \right] \cos^{n-1} x.$$

En posant $\alpha_n = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, on a $g_n(\alpha_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n$ et on obtient le tableau :

x	0	α_n	$\frac{\pi}{2}$
g_n	0	$g_n(\alpha_n)$	0

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $\cos x \in]0, 1[$, donc $f_n(x) = x \sin x \cos^n x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle.

D'après le tableau ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$|f_n(x)| = |x g_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} g_n(\alpha_n).$$

Donc $\sup_I |f_n| \leq \frac{\pi}{2} g_n(\alpha_n)$ et :

$$g_n(\alpha_n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^{-\frac{n}{2} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_I |f_n| = 0$ et ainsi :

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^n f_k(0) = 0$ et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos x \neq 1$, et :

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n x \sin x \cos^k x = x \sin x \cos x \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x \cos x}{1 - \cos x}.$$

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x \sin x \cos x}{1 - \cos x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Enfin, $x \sin x \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$ et $1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0)$. Ceci prouve que f n'est pas continue en 0, donc que la convergence de $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur I , et donc pas normale non plus.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et ainsi :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

De surcroît, comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| < \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^2}$, la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur \mathbb{R} et comme toutes les fonctions f_n sont continues sur \mathbb{R} :

La fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Toutes les fonctions f_n sont de classe C^1 sur \mathbb{R} avec $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

La série $\sum f_n'(0)$ (qui est la série harmonique) diverge.

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$, $|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n^3 a^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Ceci permet de conclure que $f = \sum_{n \geq 1} f_n$ est de classe C^1 sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

La fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* .

On a $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n(x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} h(nx)$ avec $h(t) = \frac{\arctan t}{t}$.

On a $\lim_0 h = 1$, donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$, $h(t) \geq \frac{1}{2}$.

Or, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$, donc pour tout réel $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq 2A$.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) > 0$, donc $\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} h(nx)$.

Alors, pour tout $x \in \left[-\frac{\alpha}{N}, \frac{\alpha}{N}\right] \setminus \{0\}$, on a $nx \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} h(nx) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \frac{1}{2} \geq A.$$

Finalement, pour tout réel $A > 0$, il existe $a = \frac{\alpha}{N} > 0$ tel que $x \in [-a, a] \setminus \{0\}$, $\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq A$. Ceci prouve

que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ et donc que :

La fonction f n'est pas dérivable en 0.

3) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ est définie sur $I =]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Donc, $f_n(0) = 0$ et pour tout $x \in I \setminus \{0\}$, $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$. Dans les deux cas, la série $\sum f_n(x)$ converge et ainsi :

La fonction S est définie sur I .

b. Pour tout $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on a $n+x > n-1 > 0$ et :

$$|f_n(x)| = \frac{|x|}{n|n+x|} \leq \frac{|x|}{n(n-1)}.$$

Soit $[a, b] \subset I$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $|x| \leq \mu = \max(|a|, |b|)$, donc $|f_n(x)| \leq \frac{\mu}{n(n-1)}$.

Comme la série $\sum \frac{\mu}{n(n-1)}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$ et comme les f_n sont toutes continues sur I , la fonction S est continue sur $[a, b]$. Ainsi, S est continue sur tout segment inclus dans I .

Enfin, comme $\bigcup_{[a,b] \subset I} [a,b] = I$:

S est continue sur I .

c. Pour que $\sum f_n$ converge normalement sur I , il faut que $\|f_n\|_\infty$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Or, pour tout entier $n \geq 2$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

La série S ne converge pas normalement sur I .

d. Pour tout $x \in I$, $x+1 \in I$ et :

$$\begin{aligned} S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right) = \frac{1}{x+1} \quad (\text{par télescopage}) \end{aligned}$$

Comme S est continue sur I , elle l'est en 0, donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} S(x) = S(0) = 0$.

Comme pour tout $x \in I$, $(x+1)S(x+1) - 1 = (x+1)S(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1)S(x+1) - 1 = -1$ et donc :

$$S(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} -\frac{1}{x+1}$$

4) a. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n} = \ln x \frac{(1/x)^n}{\ln n}$.

- $u_n(1) = 0$: $\sum u_n(1)$ converge ;
- si $0 < x < 1$, $\frac{1}{x} > 1$ donc $u_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées : $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement ;
- si $x > 1$, on a $u_n(x) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{x} \right)^n \right)$ et $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $\sum \left(\frac{1}{x} \right)^n$ converge, donc : $\sum u_n(x)$ converge.

Finalement :

La série $\sum u_n$ converge simplement sur $D = [1, +\infty[$.

b. Pour tout entier $n \geq 2$, u_n est dérivable sur D en tant que quotient de telles fonctions et :

$$u_n'(x) = \frac{n}{x^{n+1} \ln n} \left(\frac{1}{n} - \ln x \right).$$

Donc, u_n est croissante sur $]1, e^{1/n}]$ et croissante sur $[e^{1/n}, +\infty[$. Comme u_n est positive sur D , on a :

$$\|u_n\|_\infty = u_n(e^{1/n}) = \frac{1}{e n \ln n}.$$

Or, $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$, et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_2^{+\infty}$ diverge, donc par comparaison série-intégrale $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge et ainsi :

$\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D .

c. Soit $x \in D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $k \geq n+1$, on a : $0 \leq u_k(x) = \frac{\ln x}{x^k \ln k} \leq \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{x} \right)^k$.

Donc, pour $x > 1$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{x} \right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^k = \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{(1/x)^{n+1}}{1-1/x} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln x}{x-1} \left(\frac{1}{x} \right)^n.$$

Or, pour tout $x \in D$, $0 \leq \left(\frac{1}{x} \right)^n \leq 1$ et $0 \leq \ln x \leq x-1$ (il suffit d'étudier $x \mapsto \ln x - x + 1$, qui est décroissante sur

$D = [1, +\infty[$ et nulle en 1, donc négative sur D). Ainsi, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$ et comme $u_k(1) = 0$ pour tout k ,

l'inégalité reste vraie pour tout $x \in D$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Comme $\frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, l'inégalité ci-dessus prouve que $\sum u_n$ converge uniformément sur D et comme toutes les fonctions u_n sont continues sur D :

La fonction $\sum_{n \geq 2} u_n$ est continue sur D .

Chapitre 5

1) On a $\frac{n^2+4n-1}{n+2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et le rayon de convergence de $\sum nx^n$ est 1, donc :

$$\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n \text{ est 1.}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(n+2 - \frac{5}{n+2} \right) x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)x^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n - 5 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n+2} \quad (\text{les trois séries convergent}).$$

Et :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)x^n &= \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ x^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n+2} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{n+1}}{n+1} - x = -\ln(1-x) - x \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} + 5 \frac{\ln(1-x) + x}{x^2} & \text{quand } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{quand } x = 0 \end{cases}$$

2) Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et notons R le rayon de convergence de cette série.

La fonction f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$:

$$4x f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n+2)(2n+1)a_{n+1} + a_n] x^n$$

Donc, f est solution de (E) si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$$

Une récurrence simple permet alors de prouver que si $a_0 \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et si $a_0 = 0$, alors

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. Dans le premier cas, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

donc $\sum a_n x^n$ converge d'après la règle de d'Alembert. Ainsi :

$$\text{Le rayon de convergence de } \sum a_n x^n \text{ est infini et } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$ et en multipliant par $(2n+2)!$, on obtient $(2(n+1))!a_{n+1} = -(2n)!a_n$.

La suite $((2n)!a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison -1 et de premier terme a_0 , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n)!a_n = a_0(-1)^n$, soit :

$$a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

Les solutions développables en série entière sur \mathbb{R} de (E) , sont alors les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a $\cos t = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sqrt{x}^{2n} = \cos \sqrt{x}$ et ainsi, les solutions développables en série entière sur \mathbb{R}_+ de (E) , sont les fonctions :

$$x \mapsto \lambda \cos \sqrt{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

La fonction $g : x \mapsto \sin \sqrt{x}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$g' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x}$$

$$g'' : x \mapsto -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4x} \sin \sqrt{x}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$4xg''(x) + 2g'(x) + g(x) = 4x \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \frac{1}{4x} \sin \sqrt{x} \right) + 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + \sin \sqrt{x} = 0.$$

Ainsi :

$$\text{La fonction } x \mapsto \sin \sqrt{x} \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \frac{2(n+1)}{2n+3} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2.$$

D'après la règle de d'Alembert, $\sum a_n x^{2n+1}$ converge quand $|x| < 1$ et diverge quand $|x| > 1$, donc :

$$\text{Le rayon de convergence de } \sum \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ est } 1.$$

La fonction f est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} (2n+1)x^{2n}$, donc :

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)f'(x) - xf(x) &= (1-x^2) \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} (2n+1)x^{2n} - x \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} (2n+1)x^{2n+2} - \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+2} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n \geq 0} (2n+2) \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2(n+1)} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n \geq 1} 2n \frac{4^{n-1} ((n-1)!)^2}{(2n-1)!} x^{2n} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n \geq 1} 2n \frac{4^n (n!)^2}{4n^2 (2n-1)!} x^{2n} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \sum_{n \geq 1} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} x^{2n} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Donc :

La fonction f vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

Sur $] -1, 1[$, l'équation $(1-x^2)y' - xy = 0$ se réécrit $y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{1}{1-x^2}$, qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda \exp\left(\int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par la méthode de variation de la constante, on trouve $x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ comme solution particulière.

Alors, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ avec $\lambda = f(0) = 0$ et finalement, pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

4) Les fonctions $x \mapsto e^{x^2/2}$ et $x \mapsto e^{-x^2/2}$ sont définies sur \mathbb{R} et paires, donc $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ est définie sur \mathbb{R} et impaire et ainsi :

La fonction $f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ est définie sur \mathbb{R} et impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ et $e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, puis, en intégrant terme à terme, on obtient :

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}.$$

Alors, f est développable en série entière sur \mathbb{R} comme produit de telles fonctions et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n n! (2n+1)} \right).$$

Les deux séries convergent absolument donc on peut utiliser le produit de Cauchy :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2n-2k}}{2^{n-k} (n-k)!} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^k k! (2k+1)} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \right) x^{2n+1}.$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t^2)^k \right) dt = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^n \cos u du = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u du = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Donc, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Remarque : On pouvait remarquer que f est la solution qui s'annule en 0 de $y' - xy = 1$ et chercher les solutions impaires et développables en série entière de cette équation : on arrive au même résultat. Ceci pourrait être une méthode (un peu tordue !) pour calculer l'intégrale de Wallis $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u du$.

Chapitre 6

1) Si $n=1$, $A=(\sin 1)$ et $\text{rg}(A)=1$. On suppose maintenant que $n \geq 2$.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = \sin(i+j) = \sin i \cos j + \cos i \sin j$.

Si on note C_1, \dots, C_n les colonnes de A , on a pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$C_j = (\cos j)X + (\sin j)Y \text{ avec } X = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \sin 2 \\ \vdots \\ \sin n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \cos 2 \\ \vdots \\ \cos n \end{pmatrix}.$$

Donc, $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{Vect}(X, Y)$ et $\text{rg}(A) \leq 2$.

$$\text{De plus, } C_1 = \begin{pmatrix} \sin 2 \\ \sin 3 \\ \vdots \\ \sin(n+1) \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} \sin 3 \\ \sin 4 \\ \vdots \\ \sin(n+2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 3 & \sin 4 \end{vmatrix} = \sin 2 \sin 4 - \sin^2 3 \approx -0,71 \neq 0, \text{ donc } C_1 \text{ et } C_2$$

sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A) \geq 2$ et finalement, $\text{rg}(A) = 2$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{rg}(A) = \begin{cases} 1 & \text{quand } n = 1 \\ 2 & \text{quand } n \geq 2 \end{cases}}$$

2) On a $E = \text{Im } f + \text{Im } g = \ker f + \ker g$.

Comme E est de dimension finie, on peut utiliser la formule de Grassmann, qui donne :

$$\dim E = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \quad (1)$$

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g) \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$2 \dim E = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) + \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$$

Or, le théorème du rang donne aussi :

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim(\ker f) = \text{rg}(g) + \dim(\ker g).$$

Donc, $2 \dim E = 2 \dim E - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) - \dim(\ker f \cap \ker g)$, soit :

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) + \dim(\ker f \cap \ker g) = 0.$$

Enfin, comme $\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$ et $\dim(\ker f \cap \ker g)$ sont des entiers positifs, la relation ci-dessus donne :

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = \dim(\ker f \cap \ker g) = 0.$$

Alors, $\text{Im } f \cap \text{Im } g = \ker f \cap \ker g = \{0\}$ et donc :

$$\boxed{E = \text{Im } f \oplus \text{Im } g = \ker f \oplus \ker g}$$

3) Supposons qu'il existe une matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $B^4 = (B^2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^8 = (B^4)^2 = 0_3$.

Or, $\text{Im } B^2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Im } B$, donc $\text{rg}(B^2) = 2 \leq \text{rg}(B)$ et comme B est nilpotente, elle n'est pas inversible donc $\text{rg}(B) \leq 2$, finalement $\text{rg}(B) = \text{rg}(B^2) = 2$ et donc $\text{Im } B^2 = \text{Im } B$.

Alors, si u est l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associée à B , on a $\text{Im } u^2 = \text{Im } u$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Im } B^{k+1} = \text{Im } u^{k+1} = u^{k+1}(\mathbb{R}^3) = u^{k-1}(u^2(\mathbb{R}^3)) = u^{k-1}(\text{Im } u^2) = u^{k-1}(\text{Im } u) = u^k(\mathbb{R}^3) = \text{Im } u^k = \text{Im } B^k.$$

La suite $(\text{Im } B^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc constante, soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{Im } B^k = \text{Im } B$.

En particulier, $\text{Im } B^8 = \text{Im } B$. Ceci est absurde car $B^8 = 0_3$ et $B \neq 0_3$, et ainsi :

Il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) a. On a toujours $\ker f \subset \ker g \circ f$.

Soit $x \in \ker g \circ f$. On a $g \circ f(x) = 0$ et comme $f \circ g = \text{id}_E$:

$$f(x) = (f \circ g)(f(x)) = (f \circ g \circ f)(x) = f((g \circ f)(x)) = f(0) = 0.$$

Donc $x \in \ker f$ et ainsi, $\ker g \circ f \subset \ker f$.

Finalement, on a bien :

$$\ker g \circ f = \ker f$$

b. On a toujours $\text{Im } g \circ f \subset \text{Im } g$.

Soit $x \in \text{Im } g$. Il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$ et comme $f \circ g = \text{id}_E$:

$$x = g((f \circ g)(z)) = (g \circ f \circ g)(z) = (g \circ f)(g(z)).$$

Donc $x \in \text{Im } g \circ f$ et ainsi, $\text{Im } g \subset \text{Im } g \circ f$.

Finalement, on a bien :

$$\text{Im } g \circ f = \text{Im } g$$

c. On veut $E = \ker f \oplus \text{Im } g$.

Procédons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.

Analyse : Supposons qu'il existe $(x_1, z) \in \ker f \times E$ tel que $x = x_1 + g(z)$.

Alors, avec $f(g(z)) = (f \circ g)(z) = z$ et $f(x_1) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + f(g(z)) = z \\ x_1 &= x - g(z) = x - (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

Ainsi, si x se décompose dans $\ker f + \operatorname{Im} g$, la décomposition est unique et la somme est directe.

Synthèse : Posons $z = f(x)$ et $x_1 = x - (g \circ f)(x)$. On a :

$$x_1 + g(z) = x_1 + g(f(x)) = x - (g \circ f)(x) + g(f(x)) = x.$$

Et $f(x_1) = f(x) - f((g \circ f)(x)) = f(x) - (f \circ g)(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, donc $x_1 \in \ker f$ et, comme bien entendu $g(z) \in \operatorname{Im} g$, on a $x \in \ker f + \operatorname{Im} g = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$.

Finalement, on a bien :

$$E = \ker f \oplus \operatorname{Im} g$$

d. Il est clair que si E est de dimension finie, alors $f \circ g = id_E$, implique que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre et donc $g \circ f = id_E$.

Pour tout trouver l'exemple demandé, il faut donc se placer en dimension infinie.

Prenons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : \varphi \mapsto \varphi'$ et $g : \varphi \mapsto \Phi$ où Φ est la primitive de φ qui s'annule en 0.

Les applications f et g sont des endomorphismes de E et pour tout $\varphi \in E$:

- $(f \circ g)(\varphi) = \Phi' = \varphi$ donc $f \circ g = id_E$;
- $(g \circ f)(\varphi) = g(\varphi') = \Psi$ où Ψ s'annule en 0, alors que φ ne s'annule pas forcément en 0, donc $g \circ f \neq id_E$.

5) a. On a :

$$\begin{aligned} H &= \{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(1) = P(1) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], (X-1)^2 \mid P\} = \{(X-1)^2 Q, Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\} \\ &= \left\{ (X-1)^2 \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k, (a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} \right\} = \operatorname{Vect} \left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Remarque : La famille $((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2})$ est échelonnée en degrés donc libre donc, avec cette méthode, on a immédiatement $\dim H = n-1$.

b. $P_n = X^n - nX - 1$ et $P_2 = X^2 - 2X - 1$.

Comme $\deg P_2 = 2$, le reste R de la division euclidienne de P_n par P_2 est de degré au plus 1, donc $R = aX + b$ avec a et b réels. Si Q est le quotient, on a :

$$P_n = X^n - nX - 1 = (X^2 - 2X - 1)Q + aX + b.$$

Les racines de $P_2 = X^2 - 2X - 1 = (X-1)^2 - 2$ sont $1 \pm \sqrt{2}$ donc :

$$\begin{cases} P_n(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 = a(1-\sqrt{2}) + b \\ P_n(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) - 1 = a(1+\sqrt{2}) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n - n(1+\sqrt{2}) + n(1-\sqrt{2}) = a(1+\sqrt{2}) - a(1-\sqrt{2}) \\ b = (1-\sqrt{2})^n - n(1-\sqrt{2}) - 1 - a(1-\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \\ b = (1-\sqrt{2})^n - \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}) - 1 \\ = \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1 \end{cases}$$

Donc, le reste de la division euclidienne de P_n par P_2 est :

$$R = \left(\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - n \right) X + \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} - 1$$

c. On a vu que $H = \text{Vect}\left((X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2}\right)$ avec $\deg((X-1)^2 X^k) = k+2$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$. Alors, la famille $(1, X, (X-1)^2, (X-1)^2 X, \dots, (X-1)^2 X^{n-2})$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$), donc c'est une base de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Et comme $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$, on a :

$$E = H \oplus \mathbb{R}_1[X]$$

On a alors immédiatement $\dim E = n+1 = \dim H + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim H + 2$, donc :

$$\dim H = n-1$$

6) On a $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{K})$ avec $A, D \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ (comme M est inversible, M^{-1} , donc A', B', C', D' existent). On a alors :

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ AB' + BD' = 0_n \\ CA' + DC' = 0_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ B' = -A^{-1}BD' \\ C' = -D^{-1}CA' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n \end{cases}$$

Ceci implique que $A - BD^{-1}C$ et $D - CA^{-1}B$ sont inversibles, et :

$$\begin{cases} A' = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ B' = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ C' = -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} \\ D' = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases}$$

Ainsi :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

7) a. Posons $\dim \ker u = \dim \operatorname{Im} u = p$. D'après le théorème du rang, $\dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$, donc :

$$\dim E = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*$$

(p est non nul car $\dim E$ est non nulle).

b. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $\ker u = \operatorname{Im} u$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $e_k \in \operatorname{Im} u$, donc il existe $e_{p+k} \in E$ tel que $e_k = u(e_{p+k})$.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbb{K}^{2p}$ tel que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_{2p} e_{2p} = 0.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $e_k \in \ker u$, donc $u(e_k) = 0$ et, en appliquant u à la relation ci-dessus, on obtient :

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_p u(e_p) + \lambda_{p+1} u(e_{p+1}) + \dots + \lambda_{2p} u(e_{2p}) = \lambda_{p+1} e_1 + \dots + \lambda_{2p} e_p = 0.$$

Comme la famille (e_1, \dots, e_p) est une base, elle est libre, donc $\lambda_{p+1} = \dots = \lambda_{2p} = 0$. La relation initiale se réécrit alors $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ et, toujours par liberté de (e_1, \dots, e_p) , on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$. Finalement, tous les λ_k sont nuls, donc \mathcal{B} est libre et comme elle contient $2p = \dim E$ vecteurs, c'est une base de E .

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_k) = 0$ et $u(e_{p+k}) = e_k$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}$$

Chapitre 7

1) En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Puis en redéveloppant le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = (1+x^2)\Delta_{n-1} - x^2\Delta_{n-2}.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+2} = (1+x^2)\Delta_{n+1} - x^2\Delta_n \Leftrightarrow \Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} = x^2(\Delta_{n+1} - \Delta_n).$$

La suite $(\Delta_{n+1} - \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison x^2 et

On a $\Delta_2 - \Delta_1 = (1+x^2+x^4) - (1+x^2) = x^4$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta_{n+1} - \Delta_n = (x^2)^{n-1}(\Delta_2 - \Delta_1) = x^{2(n+1)}.$$

Et pour $n \geq 2$:

$$\Delta_n - \Delta_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta_{k+1} - \Delta_k) = \sum_{k=1}^{n-1} x^{2(k+1)} = \sum_{k=2}^n x^{2k} \Leftrightarrow \Delta_n = \Delta_1 + \sum_{k=2}^n x^{2k}.$$

Soit avec $\Delta_1 = 1 + x^2 = \sum_{k=0}^1 x^{2k}$:

$$\boxed{\Delta_n = \sum_{k=0}^n x^{2k}}$$

2) Si on note C_1, \dots, C_n les colonnes de A et (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_j = U + a_j E_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $U = E_1 + \dots + E_n$ (vecteur colonne qui ne contient que des 1). Alors :

$$\begin{aligned} \det A = \det(C_1, \dots, C_n) &= \det(U + a_1 E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= \det(U, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) + \det(a_1 E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= \det(U, a_2 E_2, \dots, a_n E_n) + \det(a_1 E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= a_2 \dots a_n \det(U, E_2, \dots, E_n) + a_1 \det(E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= a_2 \dots a_n \det(U - E_2 \dots - E_n, E_2, \dots, E_n) + a_1 \det(E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= a_2 \dots a_n \det(E_1, E_2, \dots, E_n) + a_1 \det(E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + a_1 \det(E_1, U + a_2 E_2, \dots, U + a_n E_n) \\ &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + a_1 \det(E_1, U, U + a_3 E_3, \dots, U + a_n E_n) + a_1 \det(E_1, a_2 E_2, U + a_3 E_3, \dots, U + a_n E_n) \\ &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + \prod_{i=1, i \neq 2}^n a_i + a_1 a_2 \det(E_1, E_2, U + a_3 E_3, \dots, U + a_n E_n) \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \det A &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + \prod_{i=1, i \neq 2}^n a_i + \dots + \prod_{i=1, i \neq n-1}^n a_i + a_1 a_2 \dots a_{n-1} \det(E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, U + a_n E_n) \\ &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + \prod_{i=1, i \neq 2}^n a_i + \dots + \prod_{i=1, i \neq n-1}^n a_i + a_1 a_2 \dots a_{n-1} \det(E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, U) + a_1 a_2 \dots a_{n-1} \det(E_1, E_2, \dots, E_{n-1}, a_n E_n) \\ &= \prod_{i=1, i \neq 1}^n a_i + \prod_{i=1, i \neq 2}^n a_i + \dots + \prod_{i=1, i \neq n-1}^n a_i + \prod_{i=1, i \neq n}^n a_i + \prod_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n \prod_{i=1, i \neq k}^n a_i$$

3) Le sens réciproque est immédiat.

Supposons que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A + X) = \det X$.

Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de A et supposons aussi que A est non nulle, donc qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_j \neq 0$. On peut alors compléter $-C_j$ en une base $(U_1, \dots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons X la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_{j-1}, -C_j, U_{j+1}, \dots, U_n$.

On a alors $X \in GL_n(\mathbb{R})$, donc $\det X \neq 0$ et la $j^{\text{ième}}$ colonne de $A + X$ est $C_j - C_j = 0$, donc $\det(A + X) = 0$. Ainsi, $\det(A + X) \neq \det X$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, toutes les colonnes de A sont nulles, donc A est nulle.

Finalement, on a bien :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det X \Leftrightarrow A = 0_n$$

4) On a :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X - 2a & -b & -c & -d \\ -b & X & 0 & 0 \\ -c & 0 & X & 0 \\ -d & 0 & 0 & X \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X - 2a & -b & -c \\ -b & X & 0 \\ -c & 0 & X \end{vmatrix} = X^2 (X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2).$$

Et $X^2 - 2aX - b^2 - c^2 - d^2 = (X - a - s)(X - a + s)$ avec $s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Ainsi :

$$\chi_A = X^2 (X - a - s)(X - a + s).$$

Les valeurs propres de A sont donc 0, $a + s$ et $a - s$. Reste à voir si elles sont distinctes.

Comme $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, on a $s > 0$, donc $a + s \neq a - s$.

Si $a - s = 0$, alors $a^2 = s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, donc $b^2 + c^2 + d^2 = 0$, soit $b = c = d = 0$ (donc $a \neq 0$) et $s = |a|$.

Enfin, comme $a = s$, on a $a > 0$. Réciproquement, si $b = c = d = 0$ et $a > 0$, alors $a - s = 0$, et $a + s = 2a$.

De même, $a + s = 0$ si et seulement si $b = c = d = 0$ et $a < 0$, et $a - s = 2a$.

Finalement :

$$\text{Si } b = c = d = 0 \text{ et } a \neq 0, \text{ alors } Sp(A) = \{0, 2a\}, \text{ sinon } Sp(A) = \{0, a - s, a + s\} \text{ avec } s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

5) On a $\chi_A = \det(XI_n - A)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(xI_n - A^{-1}) = \det\left(xA^{-1}\left(A - \frac{1}{x}I_n\right)\right) = x^n \det A^{-1} \det\left(A - \frac{1}{x}I_n\right) = \frac{(-x)^n}{\det A} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc :

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \frac{(-1)^n}{\det A} X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right)$$

Chapitre 8

1) Remarquons que :

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Comme $a \neq 0$, $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est une valeur propre non nulle de A . La dimension du sous-espace propre E_λ associé est de dimension au moins 1.

Si on note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, on a $C \neq 0$ et $C_1 = aC, C_2 = bC, C_3 = cC, C_4 = dC$ donc

$\text{Im } A = \text{Vect}(C)$ et $\text{rg}(A) = 1$, donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre $E_0 = \ker A$ associé est de dimension 3.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus 4, on a :

$$\text{Sp}(A) = \{0, \lambda\}, \dim E_0 = 3 \text{ et } \dim E_\lambda = 1 \text{ avec } E_\lambda = \text{Vect}(C).$$

On a $\dim E_0 + \dim E_\lambda = 4 = \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donc A est diagonalisable.

Enfin, si (E_1, E_2, E_3, E_4) est la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases} AE_1 = C_1 = aC \\ AE_2 = C_2 = bC \\ AE_3 = C_3 = cC \\ AE_4 = C_4 = dC \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} A(aE_2 - bE_1) = 0 \\ A(aE_3 - cE_1) = 0 \\ A(aE_4 - dE_1) = 0 \end{cases}$$

Comme $a \neq 0$, la famille $(aE_2 - bE_1, aE_3 - cE_1, aE_4 - dE_1)$ est une famille libre de trois vecteurs de $E_0 = \ker A$, qui est de dimension 3. C'en est donc une base et ainsi, avec $\lambda = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$:

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{0, \lambda\}, E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right), E_\lambda = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right) \text{ et } A \text{ est diagonalisable.}}$$

2) En développant par rapport à la première ligne :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -2 \\ a & X-1 & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} a & X-1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X-1)X - 2(X-1-a) = X^3 - 3X^2 + 2(a+1) \end{aligned}$$

On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2(a+1)$. Après une étude rapide de f , on obtient le tableau :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	$-\infty$	$2(a+1)$	$2(a-1)$	$+\infty$

Alors, avec le théorème de la bijection continue, on peut conclure que :

- si $2(a+1) < 0$ ou $2(a-1) > 0$, soit $a < -1$ ou $a > 1$, f admet une unique racine réelle (simple) et deux racines complexes conjuguées (distinctes) ;
- si $2(a+1) = 0$ ou $2(a-1) = 0$, soit $a = -1$ ou 1 , f admet et deux racines réelles, dont une double (2 quand $a = 1$, 0 quand $a = -1$) ;
- si $2(a-1) < 0 < 2(a+1)$, soit $-1 < a < 1$, f admet deux racines réelles distinctes.

Dans le premier cas, A est diagonalisable dans \mathbb{C} et pas dans \mathbb{R} ; dans le troisième cas, A est diagonalisable dans \mathbb{R} .

Quand $a = -1$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ donne $x + y = x + z = 0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 0 est une droite : A n'est diagonalisable ni dans \mathbb{R} , ni dans \mathbb{C} .

Quand $a = 1$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donne $x + y = z = 0$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 est une droite : A n'est diagonalisable ni dans \mathbb{R} , ni dans \mathbb{C} .

Finalement :

- Si $a < -1$ ou $a > 1$, A est diagonalisable dans \mathbb{C} et pas dans \mathbb{R} .
- Si $a = -1$ ou 1 , A n'est diagonalisable ni dans \mathbb{R} , ni dans \mathbb{C} .
- Si $-1 < a < 1$, A est diagonalisable dans \mathbb{R} (et donc dans \mathbb{C}).

3) En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X & 0 \\ -2 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-1)^2.$$

Alors, $Sp(A) = \{0, 1\}$ et on trouve $E_0 = \ker A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $E_1 = \ker(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas 3, A n'est pas diagonalisable.

La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et on a :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, la matrice dans la base \mathcal{B} de f , l'endomorphisme canoniquement associé à A est $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda \in Sp(M)$ et X est un vecteur propre associé, alors $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2 X = M(\lambda X) = \lambda MX = \lambda^2 X$. Ainsi, $\lambda^2 \in Sp(A) = \{0, 1\}$, donc $\lambda^2 = 0$ ou 1 , soit $\lambda = -1$ ou 0 ou 1 . Donc :

$$Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$$

Remarquons déjà que si M est diagonalisable, alors son carré, A , l'est aussi, ce qui est absurde. Donc, M n'est pas diagonalisable. Ainsi, on ne peut avoir $Sp(M) = \{-1, 0, 1\}$ (car M est 3×3).

Si $Sp(M)$ contient deux valeurs, alors les sous-espaces propres sont de dimension 1 (sinon M serait diagonalisable) et si $Sp(M)$ ne contient qu'une seule valeur, alors le sous-espace propre associé est de dimension au plus 2 (sinon M serait diagonalisable, donc scalaire).

Les sous-espaces propres sont de dimension 1 si M possède 2 vap et au plus 2 si M possède une seule vap.

Si 0 n'est pas valeur propre de M , alors M est inversible et son carré aussi. Comme $M^2 = A$ n'est pas inversible, M ne l'est pas non plus, et donc :

0 est valeur propre de M .

On a finalement pour l'instant trois cas : $Sp(M) = \{-1, 0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{0\}$.

Remarquons qu'il s'agit du spectre réel au complexe, donc si $Sp(M) = \{0\}$, on a $\chi_M = X^3$, donc $M^3 = 0_3$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi, M est nilpotente, donc $M^2 = A$ aussi et 0 est la seule valeur propre de A . Ceci est absurde, donc $Sp(M) \neq \{0\}$.

Ainsi, $Sp(M) = \{-1, 0\}$ ou $\{0, 1\}$.

Remarquons encore que $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est solution du problème si et seulement si $-M$ l'est. Or :

$$Sp(M) = \{-1, 0\} \Leftrightarrow Sp(-M) = \{0, 1\}.$$

Donc, il suffit de déterminer les solutions M telles que $Sp(M) = \{0, 1\}$.

D'après ce qui précède, on a alors : $\dim \ker M = \dim \ker (M - I_3) = 1$.

Or, si $X \in \ker(M - \lambda I_3)$, on a $MX = \lambda X$, donc $AX = M^2 X = \lambda^2 X = \lambda X$ (car $\lambda = 0$ ou 1 , donc $\lambda^2 = \lambda$) et ainsi, $X \in \ker(A - \lambda I_3)$. Comme on a vu que $\dim \ker A = \dim \ker (A - I_3) = 1$, on a :

$$\ker M = \ker A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\ker(M - I_3) = \ker(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

En reprenant ce que l'on a vu plus haut on a $M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à M , on a $M_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (avec les sous-espaces propres de M vus ci-dessus).

Comme $f = u^2$, on a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 1 & b+bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 1 \\ b(1+c) = 2 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

(La troisième équation du système donne $c = \pm 1$, mais $c = -1$ est impossible du fait de la deuxième équation.)

Ainsi, $M_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc :

$$M = PM_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et finalement :

Les matrices M telles que $M^2 = A$ sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4) Le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$. Comme il est scindé à racines simples, A est diagonalisable et $Sp(A) \subset \{0, 1, 2\}$.

Or, A est inversible donc $0 \notin Sp(A)$ et $Sp(A) \subset \{1, 2\}$.

Si on note n_1 et n_2 les multiplicités de 1 et 2 respectivement dans le polynôme caractéristique de A (égales ici aux dimensions des sous-espaces propres correspondants), on a :

$$\begin{cases} Tr(A) = n_1 + 2n_2 = 8 \\ n_1 + n_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_1 = 4 \\ n_2 = 2 \end{cases}$$

Ainsi, A est semblable à $D = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 2, 2)$.

Réciproquement, toute matrice semblable à cette matrice diagonale D vérifie les hypothèses, donc les matrices $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ telles que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0_6$ et $Tr(A) = 8$ sont les matrices :

$$A = P^{-1}DP \text{ avec } D = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 2, 2) \text{ et } P \in GL_6(\mathbb{R}).$$

On a vu que $A(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$. Comme A est inversible, on a plus simplement $(A - I_6)(A - 2I_6) = 0_6$ et donc $(X - 1)(X - 2)$ est annulateur de A .

Soit R un polynôme annulateur de A . Les valeurs propres de A (1 et 2) sont racines de R donc $R = (X - 1)(X - 2)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Réciproquement, si pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(A - I_6)(A - 2I_6)Q(A) = 0_6 Q(A) = 0_6$, donc $(X - 1)(X - 2)Q$ est annulateur de A .

Finalement :

Les polynômes annulateurs de A sont les polynômes de la forme $(X - 1)(X - 2)Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$5) \text{ On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notons C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 les colonnes de A et $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de \mathbb{R}^5 , identifié à $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Les première et dernière colonnes de A étant identiques, on a :

$$\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1 + e_5, e_2, e_3, e_4).$$

Comme la famille $(e_1 + e_5, e_2, e_3, e_4)$ est libre, on a $\text{rg}(A) = 4$. Alors, $\dim \ker A = 1$ d'après le théorème du rang.

Comme $\dim \ker A = 1$, 0 est valeur propre de A , de multiplicité 1. On a $Ae_1 = C_1 = C_5 = Ae_5$, donc $A(e_1 - e_5) = 0$ et ainsi, $\ker A = \text{Vect}(e_1 - e_5)$.

De plus, pour tout $j \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$, $Ae_j = C_j = e_j$, donc 1 est valeur propre de A , de multiplicité au moins 3.

Comme on a 4 racines réelles de χ_A (comptées avec multiplicité) qui est de degré 5, χ_A est scindé sur \mathbb{R} et si λ est la cinquième racine réelle de χ_A , on a :

$$\text{Tr}(A) = 5 = 0 + 1 + 1 + 1 + \lambda.$$

Donc, $\lambda = 2$ et :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + u = 0 \\ x - y + u = 0 \\ x - z + u = 0 \\ x - t + u = 0 \\ x - u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = t = 2x \\ u = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, si $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est la base canonique de \mathbb{R}^5 , on a :

$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= 4 \\ \text{Im } A &= \text{Vect}(e_1 + e_5, e_2, e_3, e_4) \\ \ker A &= \text{Vect}(e_1 - e_5) \\ \text{Sp}(A) &= \{0, 1, 2\} \\ \ker(A - I_5) &= \text{Vect}(e_2, e_3, e_4) \\ \ker(A - 2I_5) &= \text{Vect}(e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 2e_4 + e_5) \end{aligned}$

6) Il est clair que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $f(P) = P(1)X - P(3)(25 - X^2) \in \mathbb{R}[X]$. De plus, les applications évaluations $P \mapsto P(1)$ et $P \mapsto P(3)$ sont linéaires, donc f est linéaire et ainsi :

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P) = P(1)X + P(3)(X^2 - 25) \in \text{Vect}(X, X^2 - 25)$, donc $\text{Im } f \subset \text{Vect}(X, X^2 - 25)$. Or :

$$f\left(\frac{1}{2}(3 - X)\right) = X \quad f\left(\frac{1}{2}(X - 1)\right) = X^2 - 25.$$

Donc, $\text{Vect}(X, X^2 - 25) \subset \text{Im } f$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}(X, X^2 - 25)}$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Comme la famille $(X, X^2 - 25)$ est libre (échelonnée en degrés), on a :

$$f(P) = P(1)X + P(3)(X^2 - 25) = 0 \Leftrightarrow P(1) = P(3) = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-3) \mid P.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker f = \{(X-1)(X-3)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}}$$

D'après ce qui précède, 0 est valeur propre de f .

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$ une éventuelle valeur propre non nulle de f et P un vecteur propre associé.

On a $f(P) = \lambda P$, donc $P = \frac{1}{\lambda} f(P) \in \text{Im } f = \text{Vect}(X, X^2 - 25)$, soit :

$$P = aX + b(X^2 - 25).$$

Alors, $P(1) = a - 24b$ et $P(3) = 3a - 16b$, et :

$$\begin{aligned} f(P) = \lambda P &\Leftrightarrow (a - 24b)X + (3a - 16b)(X^2 - 25) = \lambda aX + \lambda b(X^2 - 25) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 24b = \lambda a \\ 3a - 16b = \lambda b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 24 \\ 3 & -(\lambda + 16) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme P est non nul, $(a, b) \neq (0, 0)$, donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 24 \\ 3 & -(\lambda + 16) \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, soit :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 24 \\ 3 & -(\lambda + 16) \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 16) - 72 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 15\lambda + 56 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -8 \text{ ou } -7.$$

On a alors :

$$f(P) = -8P \Leftrightarrow 3a - 8b = 0 \Leftrightarrow P = \frac{a}{8} [8X + 3(X^2 - 25)]$$

$$f(P) = -7P \Leftrightarrow a - 3b = 0 \Leftrightarrow P = \frac{a}{3} [3X + (X^2 - 25)]$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Sp}(f) &= \{-8, -7, 0\} \\ \ker(f + 8id) &= \text{Vect}(8X + 3(X^2 - 25)) \\ \ker(f + 7id) &= \text{Vect}(3X + (X^2 - 25)) \\ \ker f &= \{(X-1)(X-3)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\} \end{aligned}}$$

7) Comme A est triangulaire supérieure, on a immédiatement $\text{Sp}(A) = \{a, g\}$.

Si $a = g$, alors A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_4 , donc égale à aI_4 et donc si et seulement si $b = c = d = e = f = h = 0$.

Si $a \neq g$, alors A est diagonalisable si et seulement si $\dim \ker(A - aI_4) = \dim \ker(A - gI_4) = 2$, soit :

$$\operatorname{rg}(A - aI_4) = \operatorname{rg}(A - gI_4) = 2.$$

On a $A - aI_4 = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g-a & h \\ 0 & 0 & 0 & g-a \end{pmatrix}$ et, comme $g - a \neq 0$, les vecteurs $\begin{pmatrix} c \\ e \\ g-a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} d \\ f \\ h \\ g-a \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

Alors, $\operatorname{rg}(A - aI_4) = 2$ si et seulement si $\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} c \\ e \\ g-a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ f \\ h \\ g-a \end{pmatrix} \right)$, soit $b = 0$.

De même (en raisonnant sur les lignes de $A - gI_4$), $\operatorname{rg}(A - gI_4) = 2$ si et seulement si $h = 0$.

Finalement :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable si et seulement si } \begin{cases} a = g \\ b = c = d = e = f = h = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a \neq g \\ b = h = 0 \end{cases}.$$

8) On note $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\phi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$, donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a immédiatement :

$$\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(E_{1,1} + E_{1,2}, E_{2,1} + E_{2,2})$$

Avec le théorème du rang, on obtient $\dim \ker \phi = 2$. Comme $\phi(E_{1,1}) = \phi(E_{1,2})$ et $\phi(E_{2,1}) = \phi(E_{2,2})$, on obtient :

$$\ker \phi = \operatorname{Vect}(E_{1,1} - E_{1,2}, E_{2,1} - E_{2,2})$$

On a déjà $0 \in \operatorname{Sp}(\phi)$ avec $\dim \ker \phi = 2$.

De plus, $\phi(E_{1,1}) = \phi(E_{1,2}) = E_{1,1} + E_{1,2}$ et $\phi(E_{2,1}) = \phi(E_{2,2}) = E_{2,1} + E_{2,2}$, donc :

$$\phi(E_{1,1} + E_{1,2}) = 2(E_{1,1} + E_{1,2}) \text{ et } \phi(E_{2,1} + E_{2,2}) = 2(E_{2,1} + E_{2,2}).$$

Donc, $2 \in \operatorname{Sp}(\phi)$ avec $\dim \ker(\phi - 2id) = 2$.

Comme $\dim \ker \phi = \dim \ker(\phi - 2id) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\phi \text{ est diagonalisable avec } \operatorname{Sp}(\phi) = \{0, 2\} \text{ et } \begin{cases} \ker \phi = \operatorname{Vect}(E_{1,1} - E_{1,2}, E_{2,1} - E_{2,2}) \\ \ker(\phi - 2id) = \operatorname{Vect}(E_{1,1} + E_{1,2}, E_{2,1} + E_{2,2}) \end{cases}$$

9) La linéarité de la transposition assure que $f : M \mapsto M + 2{}^tM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit λ une éventuelle valeur propre de f et M un vecteur propre associé. On a $f(M) = M + 2{}^tM = \lambda M$, donc :

$${}^tM = \frac{1}{2}(\lambda - 1)M \Leftrightarrow M = \frac{1}{2}(\lambda - 1){}^tM \text{ (en transposant)}$$

Donc, $M = \frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 M$ et comme $M \neq 0$, on obtient $\frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 = 1$, soit :

$$\lambda = -1 \text{ ou } 3.$$

Les potentielles valeurs propres de f sont donc -1 et 3 .

Pour $\lambda = -1$, on obtient ${}^tM = -M$, donc le sous-espace propre associé à -1 est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $\lambda = 3$, on obtient ${}^tM = M$, donc le sous-espace propre associé à 3 est $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\boxed{Sp(f) = \{-1, 3\}}$$

Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

On a $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, donc :

$$\boxed{\begin{aligned} Tr(f) &= -\frac{n(n-1)}{2} + 3\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \\ \det f &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 3^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}}$$

Chapitre 9

1) a. Posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a alors $f : t \mapsto \sum_{k=0}^n a_k t^k X^k$ et comme toutes les applications polynomiales $t \mapsto a_k t^k$ sont dérivables sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} avec $f' : t \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} X^k = X \sum_{k=1}^n k a_k (tX)^{k-1} = X P'(tX)$.

Ainsi :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f' : t \mapsto X P'(tX).$$

b. L'application $L : M \mapsto MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on a $f = L \circ A$. Comme $A : t \mapsto A(t)$ est dérivable sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $L \circ A'$, soit :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f' : t \mapsto A'(t)B.$$

c. Notons $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B(t) = (b_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$. On a alors $A(t)B(t) = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}(t)b_{k,j}(t) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Comme A et B sont dérivables sur \mathbb{R} , toutes les applications $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ le sont aussi. Alors, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de produits de telles fonctions, de dérivé :

$$\sum_{k=1}^n (a'_{i,k} b_{k,j} + a_{i,k} b'_{k,j}).$$

Ainsi, f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\left(\sum_{k=1}^n (a'_{i,k} b_{k,j} + a_{i,k} b'_{k,j}) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, soit :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f' : t \mapsto A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

d. En conservant les notations précédentes, on a $f : t \mapsto \text{Tr}(A(t)) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t)$ est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de telles fonctions, de dérivé $f' : t \mapsto \sum_{i=1}^n a'_{i,i}(t)$, soit :

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec } f' : t \mapsto \text{Tr}(A'(t)).$$

Remarque : On pouvait aussi dire que $f = \text{Tr} \circ A$ et, comme la trace est linéaire, f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivé $f' = \text{Tr} \circ A'$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \ln(1+xt)$ est bien définie et continue sur $[0, x]$, donc $F(x) = \int_0^x \ln(1+xt) dt$ est bien défini et $F(0) = 0$. Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Tel qu'indiqué posons $u = xt$ ($t \mapsto xt$ est bijective et C^1 de $[0, x]$ dans $[0, x^2]$). On obtient :

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \ln(1+u) du = \frac{1}{x} [(1+u) \ln(1+u) - u]_0^{x^2} = \frac{(1+x^2) \ln(1+x^2) - x^2}{x}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} + x \ln(1+x^2) - x.$$

La fonction F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme somme de telles fonctions et on a $F(x) = o(x)$ quand $x \rightarrow 0$. Alors, comme la fonction F admet un DL d'ordre 1 en 0, elle est dérivable en 0. Finalement :

F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

3) On note \mathcal{C}_f la courbe de f . La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* avec :

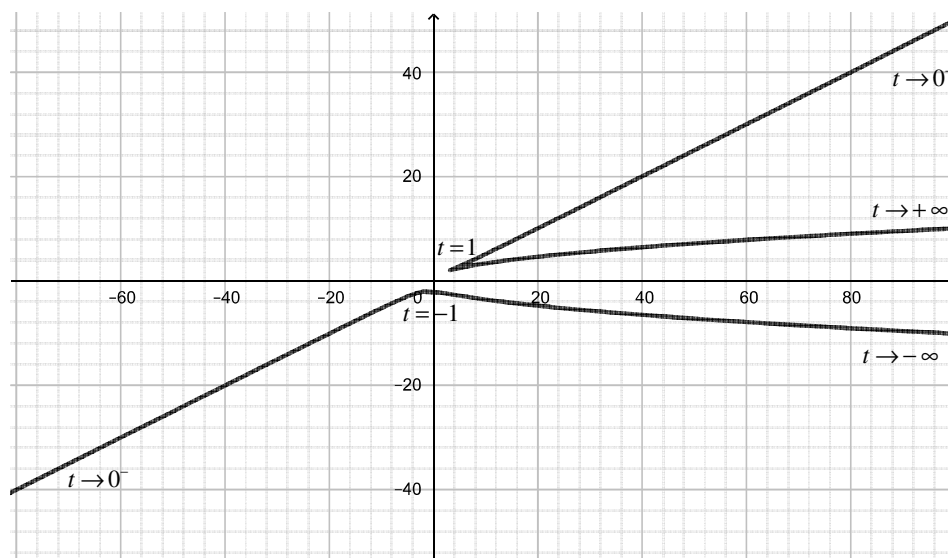
$$f': t \mapsto \begin{cases} x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = 2 \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t^2} \\ y(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	$-$	-4	$-$	$-$	$+$
x	$+\infty$	-1	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$	2	$+\infty$
$y'(t)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$

- On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, donc \mathcal{C}_f admet une direction asymptotique horizontale quand $t \rightarrow \pm\infty$.
- On a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left[y(t) - \frac{1}{2}x(t) \right] = 0$, donc \mathcal{C}_f admet une asymptote d'équation $y = \frac{1}{2}x$ en $t \rightarrow 0$.
- On a $f(1+h) - f(1) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - h^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de \mathcal{C}_f est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe :



On note \mathcal{C}_g la courbe de g . Les fonctions x et y sont définies sur \mathbb{R} , 2π -périodiques (toute la courbe est obtenue quand t décrit un segment de longueur 2π), respectivement paire et impaire (la courbe est symétrique par rapport à (Ox)) et vérifient $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = -y(t)$ pour tout t (la courbe est symétrique par rapport à (Oy)). On étudie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} avec :

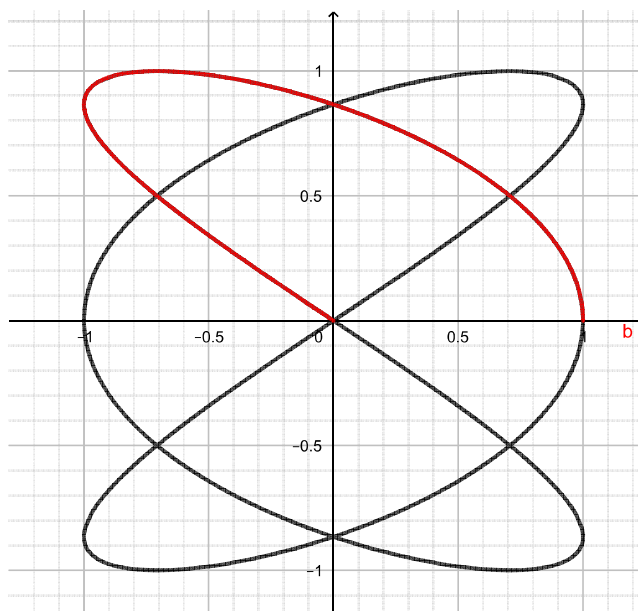
$$g' : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = -3 \sin(3t) \\ y'(t) = 2 \cos(2t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$			
$x'(t)$	0	-	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-	0	+	3
x	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	0			
y	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0			
$y'(t)$	2	+	0	-	-1	-	-2

On a $f(1+h) - f(1) = h^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - h^3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + o(h^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de \mathcal{C}_g est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p=2, q=3$).

On obtient la courbe (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) :



On note \mathcal{C}_c la courbe de c . Les fonctions x et y sont définies sur \mathbb{R} et pour tout t , $x(t+2\pi) = 2\pi a + x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$, donc la courbe entière est obtenue par translation de vecteur $(2\pi a k, 0)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ de la partie obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$. De plus, les fonctions x et y sont respectivement impaire et paire : la courbe est symétrique par rapport à (Oy) et on peut étudier sur $[0, \pi]$.

La fonction c est dérivable sur \mathbb{R} avec :

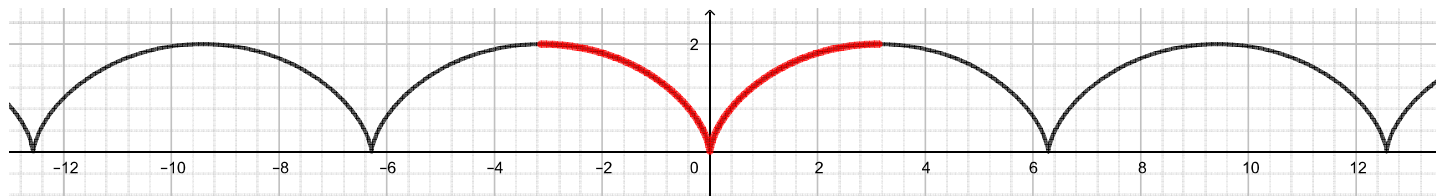
$$c' : t \mapsto \begin{cases} x'(t) = a(1 - \cos t) \\ y'(t) = a \sin t \end{cases} \quad c : t \mapsto \begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

On obtient le tableau :

t	0		π
$x'(t)$	0	+	$2a$
x	0	→	
y	0	→	
$y'(t)$	0	+	0

On a $c(t) - c(0) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(t^3)$, et comme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, le point stationnaire de \mathcal{C}_c est un point de rebroussement de 1^{ère} espèce ($p = 2, q = 3$).

On obtient la courbe pour $a = 1$ (la partie en rouge est celle correspondant à $t \in [-\pi, \pi]$) :



La longueur L d'une arche de \mathcal{C}_c est donnée par :

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\pi}^{\pi} \|c'(t)\| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 4a \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a \end{aligned}$$

Donc :

La longueur d'une arche de \mathcal{C}_c est $8a$.

Chapitre 10

1) Pour tous réels a et b , la fonction $t \mapsto \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ de plus :

$$\begin{aligned} \sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} &= \sqrt{t} \left(1 + a\sqrt{1 + \frac{1}{t}} + b\sqrt{1 + \frac{2}{t}} \right) = \sqrt{t} \left(1 + a \left(1 + \frac{1}{2t} \right) + b \left(1 + \frac{1}{t} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) \\ &= \sqrt{t} \left(1 + a + b + \frac{a+2b}{2t} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) = (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Donc, $\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} - (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} = \mathcal{O} \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} \right)$ et comme $\int \frac{dt}{t\sqrt{t}}$ converge :

$$\int^{+\infty} \left[\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} - (1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \right] dt \text{ converge.}$$

Alors :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} \right) dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int^{+\infty} \left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \right] dt \text{ converge.}$$

Or, si $1+a+b \neq 0$, on a $(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (1+a+b)\sqrt{t}$ donc $\int^{+\infty} \left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \right] dt$ diverge et

si $1+a+b=0$ et $a+2b \neq 0$, $\int^{+\infty} \left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \right] dt = \int^{+\infty} \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} dt$ diverge, donc :

$$\int^{+\infty} \left[(1+a+b)\sqrt{t} + \frac{a+2b}{2\sqrt{t}} \right] dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+a+b=0 \\ a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Donc :

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2} \right) dt \text{ converge} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{t} - 2\sqrt{t+1} + \sqrt{t+2} \right) dt = \frac{2}{3} \left[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{3} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2} \right] - \left[-2 + 2\sqrt{2} \right] \right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2} &= t\sqrt{t} \left[1 - 2 \left(1 + \frac{1}{t} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{t}} + \left(1 + \frac{2}{t} \right) \sqrt{1 + \frac{2}{t}} \right] \\ &= t\sqrt{t} \left[1 - 2 \left(1 + \frac{1}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{2t} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) + \left(1 + \frac{2}{t} \right) \left(1 + \frac{1}{t} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{t^2} \right) \right) \right] \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[t\sqrt{t} - 2(t+1)\sqrt{t+1} + (t+2)\sqrt{t+2} \right] = 0$ et ainsi :

$$I = \frac{4(1-\sqrt{2})}{3}$$

2) La fonction $t \mapsto 1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . De plus :

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right] = 1$ donc $\int_0 \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ converge ;
- $\arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right)$, donc $1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ et comme $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, $\int^{+\infty} \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ converge aussi.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \text{ converge.}}$$

Les fonctions $t \mapsto \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$ et $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , donc pour tous $a, x \in \mathbb{R}_+^*$, on en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^x t \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right]_a^x - \int_a^x \frac{t^2}{2} \frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right]_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right]_a^x + \frac{1}{2} \int_a^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2}t - \arctan t \right]_a^x \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x - \frac{a^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{2}a + \arctan a \end{aligned}$$

Quand $a \rightarrow 0^+$, on obtient :

$$\int_0^x t \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt = \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}x - \arctan x.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_0^x \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = x - \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}x + \arctan x = \frac{1}{2}x \left[1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \arctan x.$$

Or, on a vu que $1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$, donc $x \left[1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3x}$ et $x \left[1 - x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(1 - t \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt = \frac{\pi}{2}}$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a \ln(x + e^{ax})$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ est impropre en 0 et $+\infty$.

- En 0, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) = x^a \ln\left(x + 1 + ax + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)\right) = x^a \ln\left(1 + (a+1)x + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)\right)$.
 - Si $a+1 \neq 0$, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (a+1)x^{a+1}$ et $\int_0 x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ converge si et seulement si $a+2 > 0$.
 - Si $a+1 = 0$, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) = \frac{1}{x} \ln(x + e^{-x}) = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \underset{x \rightarrow 0}{o}(x)\right) = \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{o}(x) = \underset{x \rightarrow 0}{o}(1)$, donc la fonction admet une limite finie en 0 et $\int_0 x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ converge.

Ainsi, $\int_0 x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ converge si et seulement si $a > -2$.

- En $+\infty$, on a :
 - Si $a = 0$, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) = \ln(x+1)$ et $\int^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ diverge.
 - Si $a > 0$, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} ax^{a+1}$ et $\int^{+\infty} x^{a+1} dx$ diverge, donc $\int^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ diverge.
 - Si $a < 0$, on a $x^a \ln(x + e^{ax}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{|a|}}$ et $\int^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{|a|}} dx$ converge si et seulement si $|a| > 1$, car :
 - si $|a| > 1$, alors $\frac{\ln x}{x^{|a|}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}}$ et $\frac{1+|a|}{2} > 1$, donc $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1+|a|}{2}}} dx$;
 - si $|a| \leq 1$, alors $\frac{1}{x^{|a|}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^{|a|}}$ et $|a| \leq 1$, donc $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{|a|}} dx$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ converge si et seulement si $a < -1$.

Finalement :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + e^{ax}) dx$ converge si et seulement si $-2 < a < -1$.

4) Posons $g(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}$. La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+^* , donc f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et si G est une primitive de g sur \mathbb{R}_+^* , on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = G(2x) - G(x).$$

Comme G est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , f est une différence de deux fonctions C^1 sur \mathbb{R}_+^* , et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2 \frac{e^{-\sqrt{2x}}}{2x} - \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}}{x}.$$

Ainsi :

La fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* de dérivée $f' : x \mapsto \frac{e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}}{x}$.

Posons $h(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}} - 1}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* . On a $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge, donc :

$$\int_x^{2x} h(t) dt = \int_0^{2x} h(t) dt - \int_0^x h(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt = \int_x^{2x} \left(h(t) + \frac{1}{t} \right) dt = \int_x^{2x} h(t) dt + \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \int_x^{2x} h(t) dt + \ln 2.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \ln 2$$

On a $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$ converge. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt = \int_1^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt.$$

Et donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Remarquons que g est positive sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x < 2x$, donc f est positive sur \mathbb{R}_+^* . Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* revient à montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Cette intégrale est impropre en 0 et $+\infty$, mais comme f admet une limite finie en 0, $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

Par ailleurs, les fonctions f et $x \mapsto x$ sont C^1 sur \mathbb{R}_+^* , et en intégrant par parties, on a pour tout réel $X \geq 1$:

$$\int_1^X f(x) dx = [x f(x)]_1^X - \int_1^X x f'(x) dx = X f(X) - f(1) - \int_1^X (e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}) dx.$$

Or, $e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, donc $\int_1^{+\infty} (e^{-\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{x}}) dx$ converge.

Par ailleurs, $g(t) = \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^3} \right)$, donc il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $t \geq A$, on a $\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} \leq \frac{1}{t^3}$.

Alors, pour tout réel $X \geq A$, on a (avec $x < 2x$) :

$$0 \leq X f(X) = X \int_x^{2x} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{t} dt \leq X \int_x^{2x} \frac{1}{t^3} dt = X \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_x^{2x} = \frac{3}{8X}.$$

Avec le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} X f(X) = 0$ et ainsi $\int_1^X f(x) dx$ admet une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$, autrement dit $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Finalement $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et donc :

La fonction f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

5) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{x^2 + t^2}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* pour tout réel x . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\frac{\ln t}{x^2 + t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{1.5}} \right)$ et $\int^{+\infty} \frac{dt}{t^{1.5}}$ converge, donc $\int^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$ converge ;
- si $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\ln t}{x^2 + t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln t}{x^2}$ et $\int_0 \ln t dt$ converge, donc $\int_0 \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$ converge ;
- $\frac{1}{t} = o_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln t}{t^2} \right)$ et $\int_0 \frac{dt}{t}$ diverge donc $\int_0 \frac{\ln t}{t^2} dt$ diverge.

Finalement :

La fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$ définie sur $D = \mathbb{R}^*$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc dans $F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$, on peut poser

le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, ce qui donne :

$$F(1) = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \left(-\frac{1}{u^2} du \right) = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{u^2 + 1} du = -F(1).$$

Et donc :

$$F(1) = 0$$

Remarquons que F est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{t}{x}$ est de classe C^1 et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc dans $F(x)$, on peut

poser le changement de variable $u = \frac{t}{x}$, ce qui donne :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2 + u^2 x^2} x du = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\ln u + \ln x}{1 + u^2} du.$$

Et comme les deux intégrales convergent, on a :

$$F(x) = \frac{1}{x} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1 + u^2} du + \ln x \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} \right] = \frac{1}{x} F(1) + \frac{\ln x}{x} [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi \ln x}{2x}.$$

Ainsi, par imparité, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$F(x) = \frac{\pi \ln |x|}{2|x|}$$