DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 4 pages.

Problème n° 1

Moyenne de Césaro et séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k \quad \text{et} \quad v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{S_n}{n}$$

(v est la moyenne de Césaro de u).

L'objet de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum v_n$, suivant celle de $\sum u_n$.

PRELIMINAIRES

Soit $f\in C^1\left([1,+\infty[,\mathbb{C}\right)$.

1) Montrer que s'il existe $h\in C\left([1,+\infty[,\mathbb{R}_+\right)$ telle que $x\mapsto\int_1^x h(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$ et, pour tout $x\in[1,+\infty[$, $\left|f(x)\right|\le h(x)$, alors $x\mapsto\int_1^x\left|f(t)\right|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

2) Prouver que si $x\mapsto\int_1^x\left|f(t)\right|dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$, alors $x\mapsto\int_1^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x\to+\infty$.

   ☺ *On s'inspirera de la preuve de la propriété disant qu'une série absolument convergente est convergente, notamment en commençant par le cas où f est à valeurs réelles.*

3) On suppose que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$ et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

   a. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :
   $$w_n = \int_{n-1}^n (n-1-t) f'(t)dt,$$
   puis que :
   $$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

   b. En déduire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

   c. Prouver alors que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

4) On pose $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$.

   a. Montrer que $\int_1^x |f'(t)|dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.

   b. Prouver que $\forall\, x \in [1, +\infty[$:
   $$\int_1^x f(t)dt = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin u}{u} du = 2\left(\cos 1 - \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos u}{u^2} du\right).$$

   c. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge.

PARTIE I

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

5) Déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante quand $S \neq 0$.

6) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\,\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ (E désigne la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

7) On pose ici $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln\left[1+\mathrm{E}\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]}$ (E désigne encore la partie entière). Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer sa somme S, puis, à l'aide des préliminaires, déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

8) Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE II

9) On suppose ici que la série $\sum u_n$ diverge vers + ∞ ou – ∞. Déterminer la nature de $\sum v_n$.

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

10) On pose ici $u_n = (-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

11) On pose ici $u_1 = -1$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = 2(-1)^n$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

12) Que déduire des deux questions précédentes ?

PARTIE IV

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ diverge, mais pas grossièrement, et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite (finie ou infinie).

13) On pose ici $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

    On rappelle que la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

14) On reprend ici la même suite que dans la question précédente en rajoutant 1 au premier terme, soit $u_1 = 1 + \sin 1$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \sin(\sqrt{n}) - \sin(\sqrt{n-1})$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie toujours les hypothèses de cette partie et déterminer la nature de la série $\sum v_n$ correspondante.

15) Que déduire des deux questions précédentes ?

CONCLUSION

16) Dans quels cas peut-on conclure quant à la nature de $\sum v_n$ quand on connait le comportement de $\sum u_n$?

Problème n° 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

On pose :

$$\mathscr{E} = \left\{ u \in \mathcal{L}(E) \setminus \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \exists\, j \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = e_j \right\} \text{ et } \mathscr{M} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \exists\, u \in \mathscr{E},\ A = M_{\mathcal{B}}(u) \right\}.$$

Rappelons qu'un endomorphisme de E est parfaitement défini par l'image d'une base, en particulier $\mathcal{B}$, donc les éléments de $\mathscr{E}$ sont parfaitement définis.

Remarquons de plus que $\forall\, u \in \mathscr{E}$, on peut avoir $u(e_i) = u(e_{i'})$ avec $i \neq i'$. Par exemple, l'endomorphisme de E qui, à tout e_i de $\mathcal{B}$ associe e_1 est un élément de $\mathscr{E}$.

1) Soit $\varphi : [\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]} \to \mathscr{E}$; $f \mapsto u$ avec $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{f(i)}$.
    a. Justifier que φ est une bijection.
    b. En déduire que $\mathscr{E}$ est fini et donner son cardinal.
2) On conserve les notations de la question précédente.
    a. Prouver que $\forall\, u \in \mathscr{E}$, $u \in GL(E)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(u)$ est une permutation de $[\![1, n]\!]$.
    b. On choisit au hasard un élément de $\mathscr{E}$. Déterminer la probabilité que ce soit un automorphisme.
3) On choisit au hasard et simultanément deux éléments distincts de $\mathscr{E}$, u_1 et u_2.
    a. Prouver que $u_1 \circ u_2 \in \mathscr{E}$ et que $u_1 \circ u_2 \in GL(E)$ si et seulement si $(u_1, u_2) \in GL(E)^2$.
    b. En déduire la probabilité que $u_1 \circ u_2$ soit bijectif.
4) Donner (sans preuve) une généralisation des résultats de la question précédente pour k éléments de $\mathscr{E}$ distincts deux à deux et choisis au hasard et simultanément, avec $k \in [\![1, n^n]\!]$. On notera $P_{n,k}$ la probabilité que $u_1 \circ ... \circ u_k$ soit bijectif ($u_1, \ldots, u_k$ étant les k éléments de $\mathscr{E}$ choisis au hasard).
5) On admet que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Déterminer l'équivalent le plus simple de $P_{n,k}$ quand $n \to +\infty$. En déduire la limite de $P_{n,k}$ quand $n \to +\infty$. Interpréter.
6) Soit $u \in \mathscr{E}$.
    a. Prouver que u est un projecteur si et seulement s'il existe une partie A de $[\![1, n]\!]$, non vide, telle que $\forall\, i \in A$, $u(e_i) = e_i$ et $\forall\, i \in [\![1, n]\!] \setminus A$, $u(e_i) = e_j$ avec $j \in A$.
    b. Justifier qu'avec les notations précédentes, $rg(u) = \text{Card}\, A$.
    c. Soit $r \in [\![1, n]\!]$. Montrer que la probabilité qu'un élément de $\mathscr{E}$ choisi au hasard soit un projecteur de rang r vaut $\dbinom{n}{r} \dfrac{r^{n-r}}{n^n}$.
    d. Déterminer alors la probabilité qu'un élément de $\mathscr{E}$ choisi au hasard soit un projecteur.

Dans la suite, on suppose que $n=2$.

On rappelle que la famille $\mathscr{B}_c=\left(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}\right)=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7) La famille $(u)_{u\in\mathscr{E}}$ est-elle génératrice de $\mathcal{L}(E)$?

8) Déterminer le rang de $(u)_{u\in\mathscr{E}}$.

9) On pose $H=\mathrm{Vect}\left((M)_{M\in\mathscr{M}}\right)$ et $D=\mathrm{Vect}\left(E_{1,1}\right)$. Prouver que H et D sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

10) On pose $\mathscr{B}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

11) Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_c$ à $\mathscr{B}$ que l'on notera *P*, puis celle de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_c$.

12) Déterminer l'image de $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ par la projection sur *H*, parallèlement à *D*.