Exercices d'entrainement

Chapitre 1

1) Nature de la série $\sum\left(\arctan(n+\alpha)-\arctan n\right)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.
   ☺ *On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.*

2) Nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+\cos n}$.

3) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(2-\sqrt[k]{3}\right)$.

4) Calculer $\int_0^1 x^{3n+1}dx$. En déduire la nature de $\sum\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ et calculer sa somme.

Chapitre 2

1) Montrer que l'application N qui, à tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, associe $N\left((x,y)\right)=|x|+|x+2y|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter la sphère unité pour cette norme.

2) On pose $E=C^1\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur E l'application N par $N(f)=|f(0)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)|$ et on note N_∞ la norme infinie sur E ($N_\infty(f)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que N est une norme sur E.
   b. Montrer que $\overline{B}_N(0,1)\subset\overline{B}_{N_\infty}(0,1)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
   c. Existe-t-il $f\in\overline{B}_N(0,1)$ telle que $N_\infty(f)=1$ (soit $f\in S_{N_\infty}(0,1)$) ?

3) On pose $E=C^0\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ et on définit sur E l'application N par $N(f)=\int_0^1(1+t^2)|f(t)|dt$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur E ($\|f\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$).
   a. Montrer que N est une norme sur E.
   b. Trouver le plus petit réel β tel que pour toute $f\in E$, $N(f)\le\beta\|f\|_\infty$.
   c. Montrer qu'il n'existe pas de réel α strictement positif tel que pour toute $f\in E$, $\alpha\|f\|_\infty\le N(f)$.

4) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices carrées d'ordre n, inversibles et qui converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la suite $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B. Montrer qu'on a alors .

Chapitre 3

1) Soient $\left(E,\|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et a un vecteur non nul de E. On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\|x-a\| & \text{si } \|x\|\le\|a\| \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
   a. Montrer que f est continue en a.
   b. Montrer que f n'est pas continue en $-a$.

2) Soient $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et a un vecteur de E.
Montrer que l'application définie sur E par : $x \mapsto \|x\| a$, est lipschitzienne.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^2 = M\}$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La partie P est-elle bornée ? ☺ *On pourra considérer les matrices* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.
b. Montrer que f n'est pas continue à l'origine.
☺ *On pourra considérer la restriction de f à la parabole d'équation* $y = x^2$.

Chapitre 4

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin x \cos^n x$ et $f_n(x) = x g_n(x)$.
Etudier les variations de g_n sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Etudier la convergence simple, uniforme sur I de la suite de terme général f_n puis la convergence simple, uniforme, normale sur I de la série $\sum f_n$.

2) Donner le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.
Etudier la continuité, puis le caractère C^1 de f.

3) On pose $I =]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} \right)$.

a. Montrer la fonction S est définie sur I.
b. Montrer la fonction S est continue sur tout segment inclus dans I. Est-elle continue sur I ?
c. La série S converge-t-elle normalement sur I ?
d. Calculer $S(x+1) - S(x)$. Donner un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

4) Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$.

a. Donner le domaine D sur lequel la série $\sum u_n$ converge simplement.
b. Montrer $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.
c. Montrer que pour $x \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. En déduire que la fonction $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ est continue sur D.

Chapitre 5

1) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2+4n-1}{n+2} x^n$.

2) Montrer que si $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de de l'équation différentielle (E): $4xy''+2y'+y=0$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.

Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Que peut-on conclure ?

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$. A l'aide des développements en série entière connus, on donnera une expression compacte de ces solutions sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Donner le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Montrer que *f* vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$ et en déduire *f* à l'aide des fonctions usuelles.

4) Etudier la parité de $f : x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$.

Montrer que *f* est développable en série entière et donner son développement.

☺ *On pourra montrer que* $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ *et on donne* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u \, du = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Chapitre 6

1) Donner le rang de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \sin(i+j)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

2) Soient *f* et *g* deux endomorphismes d'un espace vectoriel *E* de dimension finie, tels que :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g .$$

Montrer que ces sommes sont directes.

3) Existe-t-il une matrice *B* telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

4) Soit *E* un espace vectoriel, *f* et *g* deux endomorphismes de *E* tel que $f \circ g = id_E$.

   a. Montrer que $\ker g \circ f = \ker f$.
   b. Montrer que $\operatorname{Im} g \circ f = \operatorname{Im} g$.
   c. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires dans *E*.
   d. Déterminer un espace vectoriel *E* et deux endomorphismes *f* et *g* de *E* tel que $f \circ g = id_E$ et $g \circ f \neq id_E$.

5) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2$, et $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(1) = P(1) = 0\}$.

   a. Justifier que *H* est un sous-espace vectoriel de *E*.
   b. Soit $P_n = X^n - nX - 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par P_2.
   c. Montrer que $E = H \oplus \mathbb{R}_1[X]$. En déduire la dimension de *H*.

6) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $A,B,C,D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. On suppose M, A et D inversibles.

   Exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

7) Soient E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\ker u=\operatorname{Im}u$.

   a. Montrer que $\dim E=2p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$.

   b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p\end{pmatrix}$.

Chapitre 7

1) Calculer $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & & \vdots \\ 0 & -x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}_n$.

2) Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j}=1+\delta_{i,j}a_i$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$.

   Montrer que $\det A=\prod_{i=1}^{n}a_i+\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1,i\neq k}^{n}a_i$.

3) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall\, X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A+X)=\det X \iff A=0_n.$$

   ☺ *Pour le sens direct, on pourra supposer que A a une colonne non nulle, C_j (la $j^{\text{ième}}$ colonne).*

4) Donner les valeurs propres de $A=\begin{pmatrix} 2a & b & c & d \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c,d)\neq(0,0,0,0)$.

5) Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme caractéristique de A^{-1} en fonction de celui de A.

Chapitre 8

1) Donner les éléments propres de $A=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $a\neq 0$.

   A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

3) On veut résoudre l'équation $M^2=A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

   Montrer que A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.

   Montrer que le spectre de $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2=A$ est inclus dans $\{-1,0,1\}$.

   Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants. Montrer que 0 est valeur propre de M.

   Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, solutions de $M^2=A$.

4) Soit A de $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A^3-3A^2+2A=0_6$ et $Tr(A)=8$.
   a. Justifier que A est diagonalisable.
   b. Que peut-on dire des valeurs propres de A ?
   c. Donner une matrice D diagonale, semblable à A.
   d. Donner tous les polynômes annulateurs de A.

5) Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $A\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.

6) Montrer que l'application f donnée par $f(P)=P(1)X-P(3)(25-X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   Donner son noyau et son image. Déterminer ses valeurs propres.

7) A quelle condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s) sur a,b,c,d,e,f la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d\\ 0 & a & e & f\\ 0 & 0 & g & h\\ 0 & 0 & 0 & g\end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

8) On note $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\phi(M)=MP$.
   Donner, si possible sans calcul, la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, puis son noyau et son image. Le diagonaliser, toujours sans calcul.

9) Montrer que f, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M)=M+2\,{}^tM$ est un endomorphisme.
   Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? Calculer sa trace et son déterminant.

Chapitre 9

1) Dans chacun des cas suivants, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
   a. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}_n[X]$; $t\mapsto P(tX)$ où P est un polynôme fixé de $\mathbb{K}_n[X]$.
   b. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B$ où A est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   c. $f:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; $t\mapsto A(t)B(t)$ où A et B sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   d. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$; $t\mapsto Tr\big(A(t)\big)$ où A est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   ☺ *Utiliser les applications composantes de f suivant la base canonique de l'espace considéré.*

2) Etudier la dérivabilité de la fonction F, définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x)=\int_0^x \ln(1+xt)\,dt$. ☺ *Poser* $u=xt$.

3) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f:\mathbb{R}\to E$ dérivable en 0 et telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=2f(x)$. Montrer que f est linéaire.

4) Etudier les arcs paramétrés suivants (asymptotes, points stationnaires, points multiples) :

$$f:t\mapsto\begin{cases} x(t)=t^2+\dfrac{2}{t}\\[2mm] y(t)=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}\qquad g:t\mapsto\begin{cases} x(t)=\cos(3t)\\ y(t)=\sin(2t)\end{cases}\qquad c:t\mapsto\begin{cases} x(t)=a(t-\sin t)\\ y(t)=a(1-\cos t)\end{cases}\text{ avec } a>0.$$

   Quelle est la longueur d'une arche de c ?

Chapitre 10

1) Pour quels réels *a* et *b*, l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt$ converge-t-elle ?

   En cas de convergence, calculer *I*.

2) Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty}\left(1-t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$, puis la calculer à l'aide du calcul de $\int_0^{x} t\arctan\left(\frac{1}{t}\right)dt$.

3) Nature selon $a\in\mathbb{R}$ de $\int_0^{+\infty} x^a \ln(x+e^{ax})\,dx$.

4) Montrer que $f: x\mapsto \int_x^{2x}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Déterminer ses limites en 0 et $+\infty$. La fonction *f* est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

5) Déterminer l'ensemble de définition *D* de $F: x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{x^2+t^2}dt$. Calculer $F(1)$ (*on pourra poser* $u=\frac{1}{t}$) et en déduire $F(x)$.