Résumé du chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$*,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, et* $\sum f_n$ *est la série de fonctions associée et on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ *.*

Suites de fonctions

Définitions fondamentales

- Convergence simple (CVS) sur I : $\forall\, x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe (la limite dépend de x) ;
- Convergence uniforme (CVU) sur I : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty$ existe et tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Et on a :

$$\text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

Limite

Si a est une extrémité de I (éventuellement infinie) et :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe et est finie ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Continuité

Si :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I (ou sur tout segment inclus dans I).

Alors :

$$f \text{ est continue sur } I.$$

Classe C^k

Si $k \in \mathbb{N}^*$ et :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur I ;
- $\forall\, j \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I ;
- $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment inclus dans I).

Alors :

$$f = \lim f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall\, i \in [\![1 ; k]\!],\ \lim f_n^{(j)} = f^{(j)}.$$

REMARQUE : Si on veut C^∞ *sur I, il faut que ce que l'on vient d'écrire soit vrai pour tout entier k, donc que les convergences des suites des dérivées k*[ièmes] *soient toutes uniforme sur I (ou sur tout segment inclus dans I).*

Intégration

Si :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers *f*.

Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt \,.$$

Séries de fonctions

Définitions fondamentales

- Convergence simple (CVS) sur *I* : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur *I* ;
- Convergence uniforme (CVU) sur *I* : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur *I* ;
- Convergence normale (CVN) sur *I* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty$ existe et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge ;
- Hypothèse de domination (HD) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in I$, $|f_n(x)| \le \alpha_n$ et $\sum \alpha_n$ converge.

Et on a :

$$\text{HD sur } I \Rightarrow \text{CVN sur } I \Rightarrow \text{CVU sur } I \Rightarrow \text{CVS sur } I.$$

Dans toutes les propriétés suivantes :

- *on peut remplacer la convergence uniforme, par la convergence normale ou l'hypothèse de domination ;*
- *pour les propriétés globales de régularité (continué, classe C^k), on peut remplacer la convergence uniforme sur I par la convergence uniforme sur tout segment de I.*

Limite

Si *a* est une extrémité de *I* (éventuellement infinie) et :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et est finie ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur *I*.

Alors :

$$\text{la série } \sum \lim_{x\to a} f_n(x) \text{ converge et } \lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Continuité

Si :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur *I* ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur *I*.

Alors :

$$S \text{ est continue sur } I.$$

Classe $C^{\mathbf{k}}$

Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^k sur *I* ;
- $\forall\, j \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur *I* ;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur *I*.

Alors :

$$S \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall\, i \in [\![0\,;k]\!],\ S^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}\ .$$

Remarque : Si on veut C^∞ sur I, il faut que les convergences des séries $\sum f_n^{(k)}$ soient toutes (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) uniformes sur I.

Intégration

Si $I = [a,b]$ et :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$;

Alors :

$$\sum \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) \text{ converge et } \int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right).$$