Résumé du chapitre 6 : Compléments d'algèbre linéaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Produit et somme d'espaces vectoriels

I-1. Produit d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on considère $E_1, E_2, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition :

Le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_p$ est l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, tel que :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_p), \forall\, i \in [\![1, p]\!], x_i \in E_i\right\}.$$

Propriété :

Muni des lois ci-dessus, $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Propriété :

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont de dimension finie, respectivement $n_1, n_2, \dots, n_p$, alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est de dimension finie qui est $n_1 + n_2 + \dots + n_p$.

I-2. Somme d'espaces vectoriels

a. Somme et somme directe :

Propriété et définition :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

L'ensemble $\left\{x_1 + x_2 + \dots + x_p, (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de $F_1, F_2, \dots$ et F_p et noté $F_1 + F_2 + \dots + F_p$.

De plus, on dit que la somme est directe si la décomposition d'un vecteur x de $F_1 + F_2 + \dots + F_p$ en $x = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, est unique. On note alors $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$F_1 + F_2 + \dots + F_p = \mathrm{Vect}\left(F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_p\right).$$

b. Caractérisation d'une somme directe :

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$).

On a $F_1 + F_2 + \dots + F_p = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ si et seulement si :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 \text{ avec } x_i \in F_i \text{ pour tout } i \in [\![1, p]\!] \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

c. Cas de la dimension finie :

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés et définitions :

Si F est un sous-espace de E et $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F, on peut la compléter en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E, dite adaptée à F.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$) de dimensions respectives $n_1, n_2, \dots, n_p$ et tels que $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$. Si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_k$ est une base de F_k, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, dite adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

Propriété :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $n_1, n_2, \dots, n_p$ des entiers naturels non nuls dont la somme vaut n (où p est un entier supérieur ou égal à 2). On pose pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Si, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on pose $F_k = \operatorname{Vect}(e_{N_k+1}, e_{N_k+2}, \dots, e_{N_{k+1}})$, alors $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_{p-1}$.

Propriété :

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E (avec $p \in \mathbb{N}^*$). On a :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

II - Matrices et endomorphismes

Dans cette partie, E et F sont des $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de dimension finie, respectivement* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $p \in \mathbb{N}^*$.

II-1. Matrices et applications linéaires : rappels fondamentaux de première année

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $C = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et C, notée $M_{\mathcal{B},C}(u)$, est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des $u(e_j)$ dans la base C.

Réciproquement, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ peut être vue comme la matrice d'une application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$, appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice A.

Considérons maintenant deux autres bases $\mathcal{B}'$ et C' de E et F respectivement.

Pour tout $x \in E$, si on note X (*resp.* X') le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ (*resp.* $\mathcal{B}'$) et si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a :

$$\underline{X = PX'}.$$

On a une relation similaire dans F, avec Q la matrice de passage de C à C'.

Si on pose $A = M_{\mathcal{B},C}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}',C'}(u)$, alors :

$$\underline{B = Q^{-1}AP}.$$

Si maintenant $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$, on a :

$$\underline{B = P^{-1}AP}.$$

Définition :

> Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Propriétés :

- La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables avec la relation $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans des bases différentes.

II-2. Polynôme d'une matrice carrée, d'un endomorphisme

a. Généralités :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on peut écrire (avec $A^0 = I_n$) :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_{p-1}A^{p-1} + a_p A^p.$$

On parle de polynôme de matrice.

De la même façon, on parle de polynôme de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ pour désigner l'endomorphisme de E :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 id_E + a_1 u + ... + a_{p-1}u^{p-1} + a_p u^p.$$

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$.

Propriétés : (***non mentionnée dans le programme***)

> Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telles que $B = P^{-1}AP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
>
> - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$: A^k et B^k sont semblables avec la même matrice de passage P.
> - Pour tout $f \in \mathbb{K}[X]$, $f(B) = P^{-1}f(A)P$: $f(A)$ et $f(B)$ sont semblables avec la même matrice de passage P.

b. Polynôme annulateur :

Définition :

> Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
>
> - Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que P est un polynôme annulateur de la matrice A si $P(A) = 0_n$.
> - Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u si $P(u) = 0$.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

L'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

Toute matrice carrée admet des polynômes annulateurs.

c. Application au calcul des puissances d'une matrice :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul des puissances d'un endomorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme unitaire, de degré *p*, annulateur de *A*, alors toute puissance de *A* est une combinaison linéaire de $I_n, A, \dots, A^{p-1}$.

d. Application au calcul de l'inverse d'une matrice :

Ce qui suit s'adapte sans mal au calcul de la réciproque d'un automorphisme.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de *A* tel que $a_0 \neq 0$.

Donc, *A* est inversible, d'inverse $-\dfrac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \dots - \dfrac{a_1}{a_0} I_n$.

II-3. Matrices par blocs

Définition :

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que *M* est définie par blocs si :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,p-s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,s}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,p-s}(\mathbb{K})$ où $r \in [\![1,n]\!]$ et $s \in [\![1,p]\!]$.

En particulier, pour une matrice carrée, on peut parler de matrice diagonale (*resp.* triangulaire supérieure, *resp.* triangulaire inférieure) par blocs, qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_q \end{pmatrix} \left(\textit{resp.} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{s-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{s,r} \end{pmatrix}, \textit{ resp.} \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ A_{s,1} & \cdots & A_{s,r-1} & A_{s,r} \end{pmatrix} \right)$$

avec $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in [\![1,q]\!]$.

Propriétés :

- Combinaisons linéaires de matrices par blocs :

$$\lambda \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) + \mu \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda A + \mu A' & \lambda B + \mu B' \\ \hline \lambda C + \mu C' & \lambda D + \mu D' \end{array}\right)$$

- La transposée de $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ est $\left(\begin{array}{c|c} {}^tA & {}^tC \\ \hline {}^tB & {}^tD \end{array}\right)$.

- Produit de matrices par blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right)$$

II-4. Stabilité par un endomorphisme

Définitions et propriété :

Soit $u\in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F)\subset F$.

Dans ce cas, l'application de F dans F qui à $x\in F$ associe $u(x)$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par u sur F.

Propriété :

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E=\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i\in \mathcal{L}(E_i,F)$ pour tout $i\in [\![1,p]\!]$, alors il existe une unique application $u\in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $i\in [\![1,p]\!]$, $u|_{E_i}=u_i$.

Propriété :

Soient $f,g\in \mathcal{L}(E)$. Si f et g commutent alors le noyau et l'image de f sont stables par g.

II-5. Trace

a. Trace d'une matrice :

Définition :

Soit $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle trace de A la somme de ses éléments diagonaux, on la note $Tr(A)$ ou $tr(A)$.

Propriétés :

- L'application $\mathrm{Tr}:\mathcal{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- Pour tout $(A,B)\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $Tr(AB)=Tr(BA)$.
- Deux matrices semblables ont même trace.
- Pour tout $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Tr({}^tA)=Tr(A)$.

b. Trace d'un endomorphisme :

Dans cette partie, E est de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.

Propriété et définition :

Soit $u\in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, le scalaire $Tr\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ et est appelé trace de u, noté $Tr(u)$ ou $tr(u)$.

Propriétés :

- L'application $Tr : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
- $\forall\,(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$, $Tr(uv) = Tr(vu)$.

Propriétés : (***non mentionnée dans le programme***)

- La trace d'un projecteur est égale à son rang.
- La trace d'une symétrie par rapport à *F*, parallèlement à *G* est égale à $\dim F - \dim G$.

III - Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Dans cette partie, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

III-1. Formes linéaires

Définition :

Une forme linéaire est une application linéaire de *E* dans $\mathbb{K}$.

III-2. Hyperplans

Définition :

Un hyperplan de *E* est un sous-espace vectoriel de *E* qui admet une droite pour supplémentaire.

Propriété :

Un sous-espace vectoriel *H* de *E* (de dimension *n*) est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n-1$.

III-3. Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Propriété et définition :

Un sous-espace *H* de *E* est un hyperplan si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire φ non nulle sur *E*.

L'équation $\varphi(x) = 0$ est alors appelée une équation cartésienne de *H*.

Propriété et définition :

Deux équations linéaires (dans une base donnée) définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles.