Résumé du chapitre 7 : Compléments sur les déterminants

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

<u>*Propriété*</u> :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} = \det A \times \det D.$$

<u>*Corollaire 1*</u> :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire par blocs. Si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont les blocs diagonaux de *A*, alors :

$$\det A = \det A_1 \times \det A_2 \times ... \times \det A_p .$$

<u>*Corollaire 2*</u> : (***vu en première année***)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \dots, a_n$. On a $\det A = a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$.

<u>*Corollaire 3*</u> : (***non mentionné dans le programme***)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ où les E_i sont des sous-espaces de *E*, tous stables par *u*.

Si u_i est l'endomorphisme induit par *u* dur E_i, alors :

$$\det u = \det u_1 \times \det u_2 \times ... \times \det u_p .$$

III - Déterminant de Vandermonde

<u>*Définition et propriété*</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Le déterminant :

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ a_1^3 & a_1^3 & a_1^3 & \cdots & a_{n-1}^3 & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est appelé <u>déterminant de Vandermonde</u> et on a :

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) .$$

IV - Polynôme caractéristique

IV-1. Définition

Propriété et définition :

> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> La quantité $\det(xI_n - A)$ est polynomiale en $x \in \mathbb{K}$. Le polynôme $\det(X I_n - A)$, noté χ_A, est unitaire et de degré n. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de A.

Propriété et définition :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La quantité $\det(X\, id_E - u)$ est un polynôme (en X), unitaire et de degré n, appelé polynôme caractéristique de u, noté χ_u.

IV-2. Eléments propres

Définitions :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
>
> Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u s'il existe un vecteur x *non nul* de E tel que $u(x) = \lambda x$.
>
> Un tel vecteur x est appelé vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
>
> L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u, noté $Sp(u)$.
>
> Les valeurs et vecteurs propres de u sont appelés éléments propres de u.
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
>
> Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A s'il est valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
>
> Le vocabulaire vecteur propre, spectre de A, $Sp(A)$, éléments propres de A est le même que pour un endomorphisme.

Propriété et définition :

> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.
>
> L'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ est $\ker(u - \lambda id_E)$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace propre associé à λ.

Théorème :

> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.
>
> λ est valeur propre de u (*resp.*de A) si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de u (*resp.*de A), soit $\chi_u(\lambda) = 0$ (*resp.* $\chi_A(\lambda) = 0$).