Résumé du chapitre 8 : Réduction d'endomorphisme

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Eléments propres

I-1. Généralités

Le vocabulaire (valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre d'un endomorphisme, d'une matrice carrée) a été vu dans le chapitre précédent.

Rappelons que si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \in Sp(u)$ si et seulement si $\ker(u-\lambda id_E) \neq \{0_E\}$ et dans ce cas, le sous-espace propre associé à λ est $E_\lambda = \ker(u-\lambda id_E)$.

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et *D* une droite de *E*.
>
> Si *D* est stable par *u*, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in D$, $u(x) = \lambda x$.

Propriété :

> Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si *u* et *v* commutent ($uv = vu$), alors les sous-espaces propres de *u* sont stables par *v*.
>
> En particulier, les sous-espaces propres de *u* sont stables par *u*.

Propriété :

> Les sous-espaces propres d'un endomorphisme (*resp.* d'une matrice carrée) sont en somme directe.

I-2. Polynôme caractéristique

Dans toute la suite, on suppose que E est de dimension finie n.

Le vocabulaire (polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme) a été vu dans le chapitre précédent, ainsi que les notations χ_A, χ_u.

Théorème :

> Les valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété :

> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Si χ_u (*resp.* χ_A) est scindé, de racines $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (distinctes ou non), alors :
>
> $\det u = \lambda_1 \times ... \times \lambda_n$ (*resp.* $\det A = \lambda_1 \times ... \times \lambda_n$).
>
> $Tr(u) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$ (*resp.* $Tr(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n$).

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
>
> Si *F* est un sous-espace de *E* stable par *u* et u_F est l'endomorphisme induit sur *F*, alors le polynôme caractéristique de u_F divise celui de *u*.

<u>Définition</u> :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de *u* (*resp.* de *A*).

La multiplicité de λ dans χ_u (*resp.* χ_A) est appelé <u>multiplicité de la valeur propre</u> λ.

<u>Propriété</u> :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur de *u* de multiplicité n_λ et E_λ le sous-espace propre associé. On a :

$$\dim E_\lambda \leq n_\lambda .$$

II - Diagonalisation

II-1. <u>Définition</u>

<u>Définition</u> :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que *u* est <u>diagonalisable</u> s'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* est diagonale.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que *A* est <u>diagonalisable</u> si elle est semblable à une matrice diagonale.

II-2. <u>Caractérisation</u>

<u>Propriété</u> :

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à *E*.

<u>Corollaires</u> :

- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à *n*, la dimension de *E*.
- Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$ et si la dimension de tout sous-espace propre associé une valeur propre λ est égale à la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si le polynôme caractéristique de *u* est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$, alors *u* est diagonalisable.

II-3. <u>Exemples d'applications</u>

a. <u>Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable</u> :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, il existe $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (les λ_i étant les valeurs propres de *A*) et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$ avec $D^k = diag(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

b. <u>Application à la résolution des récurrences linéaires à coefficients constants</u> :

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_k u_{n+k} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n .$$

Les a_k étant des scalaires fixés et $p \in \mathbb{N}^*$. Si on pose $X_n = {}^t(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1})$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = A^n X_0 \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} & a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

III - Diagonalisation et polynômes annulateurs

III-1. Quatre lemmes : *hors programme*

III-2. Nouvelles caractérisations de diagonalisation

Propriété :

> Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Il en va de même pour une matrice carrée.

Propriété :

> Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il admet $P = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

III-3. Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : (*de Cayley-Hamilton*)

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :
>
> $$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
>
> Autrement dit, le polynôme caractéristique de *u* est un polynôme annulateur de *u*.

III-4. Cas des endomorphismes induits

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable et *F* un sous-espace vectoriel de *E* stable par *u*.
> L'endomorphisme induit par *u* sur *F* est diagonalisable.

IV - Trigonalisation

Définition :

> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que *u* est trigonalisable s'il existe une base de *E* dans laquelle la matrice de *u* est triangulaire supérieure.
> Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que *A* est trigonalisable si elle est semblable à une matrice est triangulaire supérieure.

Propriété :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
>
> L'endomorphisme *u* (*resp.* la matrice *A*) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbb{K}$.
>
> En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.