Résumé du chapitre 9 : Dérivation et courbes paramétrées

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On note $(.|.)$ le produite scalaire et $\|\cdot\|$ la norme. Remarquons que $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$, donc les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont concernées ici.

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t \mapsto f(t)$ est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

I - Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

I-1. Généralités

Définitions :

> Soit $a \in I$.
>
> Le taux d'accroissement ou taux de variation de *f* entre *a* et *t* est $\dfrac{1}{t-a}\big(f(t)-f(a)\big)$.
>
> On dit que *f* est dérivable en *a* si le taux d'accroissement de *f* entre *a* et *t* admet une limite (vectorielle) finie quand *t* tend vers *a*. Cette limite, notée $f'(a)$, est appelée dérivée de *f* en *a*.
>
> On dit que *f* est dérivable sur *I* si elle est dérivable en tout point de *I*.
>
> Dans ce cas, la fonction $t \mapsto f'(t)$ est appelée fonction dérivée de *f*.

Propriété et définition :

> La fonction *f* est dérivable en *a* si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que :
>
> $$f(t) = f(a) + (t-a)\ell + \underset{a}{o}(t-a).$$
>
> Dans ce cas, le vecteur ℓ est le vecteur dérivé $f'(a)$ et la relation ci-dessus est appelée développement limité d'ordre 1 de *f* en *a*.

I-2. Opérations

Propriétés :

> Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
>
> - Si *f* et *g* sont dérivables en $a \in I$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en *a*, de nombre dérivé $\lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
> - Si *f* et *g* sont dérivables sur *I*, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur *I*, de fonction dérivé $\lambda f' + \mu g'$.

Propriété : (***non mentionnée dans le programme***)

> Si *f* et *h* sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$ respectivement et toutes deux dérivables sur *I*, alors hf est dérivable sur *I* et $(hf)' = h'f + hf'$.

Propriétés :

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est dérivable sur *I*, de dérivée $L \circ f'$.
- Si *B* est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors la fonction (à valeurs réelles) $B(f,g)$ est dérivable sur *I*, de dérivée $B(f',g)+B(f,g')$.
- Si *J* est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ dérivable, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur *J*, de dérivée $\varphi'.(f' \circ \varphi)$.

Corollaires :

Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- $(f \mid g)$ est dérivable sur *I* et $(f \mid g)' = (f' \mid g) + (f \mid g')$.
- Si $n=2$, $\det(f,g)$ est dérivable sur *I* et $\left(\det(f,g)\right)' = \det(f',g) + \det(f,g')$.
- $\|f\|$ est dérivable en tout point *t* de *I* où $f(t) \neq 0$ et $\|f\|' = \dfrac{(f' \mid f)}{\|f\|}$.

II - Fonctions de classe C^k

II-1. Généralités

Définitions :

Soit *k* un entier naturel.

i on note $f^{(0)} = f$, on dit que *f* est k fois dérivable sur I si *f* est $k-1$ dérivable sur *I* et sa dérivée $(k-1)^{ième}$ est dérivable sur *I*. La dérivée $k^{ième}$ de *f* est notée $f^{(k)}$, $\dfrac{d^k f}{dt^k}$, parfois $D^k f$.

On dit que *f* est indéfiniment dérivable sur *I*, si elle est *k* fois dérivable sur *I* pour tout entier naturel *k*.

Pour $0 \le k \le \infty$, on dit que *f* est de classe C^k sur *I* si *f* est *k* fois dérivable sur *I* et $f^{(k)}$ est continue sur *I* (si $k < \infty$).

Notation : On note $C^k(I,\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions de classe C^k sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $t \in I$, on note $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ les coordonnées de $f(t)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la fonction *f* est de classe C^k sur *I* si et seulement les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ de sont et dans ce cas, on a $f^{(k)} = f_1^{(k)} e_1 + f_2^{(k)} e_2 + \dots + f_n^{(k)} e_n$.

II-2. Opérations

Propriétés :

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *f* et *g* deux fonctions de classe C^k sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en *a*, de fonction dérivé $\lambda f' + \mu g'$.
- Si *h* est une fonction de classe C^k sur *I* et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors hf est de classe C^k sur *I*.

- Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f$ est de classe C^k sur *I* et $(L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.
- Si *B* est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors $B(f,g)$ est de classe C^k sur *I*, en particulier $(f \mid g)$ et $\det(f,g)$ quand $n = 2$.
- Si *J* est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\varphi : J \to I$ de classe C^k, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^k sur *J*.
- $\|f\|$ est de classe C^k en tout point *t* de *I* où $f(t) \neq 0$.

II-3. Formules de Taylor

Théorèmes :

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a \in I$.

Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p :

Si *f* est de classe C^{p+1} sur *I*, alors pour tout $t \in I$:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + \int_a^t \frac{(t-u)^p}{p!} f^{(p+1)}(u)\,du .$$

Formule de Taylor-Young à l'ordre p :

Si *f* est de classe C^p sur *I*, alors :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{0}{o}(h^p) .$$

III - Arcs paramétrés

Dans cette partie, $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in D$, on note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $\vec{f}(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a donc $\vec{f} : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$.

Le plan affine usuel est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

III-1. Définition

Définitions :

La courbe *ou* arc paramétré(e) associé(e) à $\vec{f}$ est l'ensemble des points $M(t)$ du plan tels que pour tout $t \in D$, on a $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Si $\vec{f}$ est de classe C^k, avec $k \in \mathbb{N}$, on dit que l'arc paramétré est de classe C^k.

III-2. Construction d'arcs plans

a. Réduction de l'ensemble d'étude :

Périodicité :

Si *x* et *y* sont *T*-périodiques avec $T > 0$, alors la courbe est parcourue entièrement quand *t* décrit l'intersection de *D* et d'un intervalle de longueur *T*.

Symétries :

On peut établir des symétries de la courbe s'il existe un réel a tel que pour tout $t \in D$, $a - t \in D$ (ceci revient à dire que D est symétrique par rapport à $\frac{a}{2}$). Si l'une des propriétés suivantes est vérifiée, on peut réduire le domaine d'étude à la partie de D telle que $t \geq a/2$.

- Si $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est parcourue deux fois.
- Si $\begin{cases} x(a-t) = 2x_0 - x(t) \\ y(a-t) = y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = x_0$.
- Si $\begin{cases} x(a-t) = x(t) \\ y(a-t) = 2y_0 - y(t) \end{cases}$, la courbe est symétrique par rapport à la droite horizontale d'équation $y = y_0$.
- Si $\begin{cases} x(a-t) = 2x_0 - x(t) \\ y(a-t) = 2y_0 - y(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport au point $A(x_0, y_0)$.
- Si $\begin{cases} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{cases}$, alors la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

Méthode :

1. Vérifier l'éventuelle périodicité commune des fonctions x et y ;
2. Vérifier la parité des fonctions x et y ;
3. Si le domaine d'étude est symétrique par rapport à un nombre, la symétrie par rapport ce nombre peut parfois permettre de diviser par deux l'ensemble d'étude.

b. Variations et limites :

Comme pour une fonction numérique usuelle, on étudie les variations (dérivées) et les limites des deux fonctions x et y sur leur ensemble de définition commun (éventuellement réduit). On dresse alors un tableau de variations synthétique.

Exemples : **(1)** et **(2)**.

c. Tangentes :

Définitions :

> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est dérivable en t_0.
>
> Si $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) \neq 0$ *ou* $y'(t_0) \neq 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point régulier.
>
> Si $\vec{f}'(t_0) = \vec{0}$ (i.e. $x'(t_0) = 0$ *et* $y'(t_0) = 0$) alors on dit que $M(t_0)$ est un point stationnaire ou singulier.
>
> Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit qu'elle est régulière.
>
> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est deux fois dérivable en t_0.
>
> Si la famille $\left(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0)\right)$ est libre, on dit que $M(t_0)$ est un point birégulier.
>
> Si tous les points de la courbe sont biréguliers, on dit qu'elle est birégulière.

<u>Définitions</u> :

> On suppose que $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0.
>
> La courbe associée à $\vec{f}$ <u>admet une tangente</u> en $M(t_0)$ si l'on peut trouver une fonction vectorielle $\vec{u}(t)$ telle que $\vec{u}(t)$ soit un vecteur directeur de la corde $\left(M(t_0)M(t)\right)$ et $t \mapsto \vec{u}(t)$ admet une limite finie non nulle quand t tend vers t_0. Cette limite est un <u>vecteur tangent</u> à la courbe au point considéré.
>
> Quand la courbe admet une tangente, la <u>normale</u> à la courbe est la droite perpendiculaire à la tangente au point considéré. Un <u>vecteur normal</u> est un vecteur directeur de la normale à la courbe.

<u>Propriété</u> :

> Si $t \mapsto \vec{f}(t)$ est définie au voisinage de t_0 et $M(t_0)$ est un point régulier, alors la courbe admet une tangente dirigée par $\vec{f}\,'(t_0)$.

Que faire dans le cas d'un point stationnaire ?

1) Si $x'(t)$ et $y'(t)$ ont un facteur commun $h(t)$ tel que $\dfrac{1}{h(t_0)}\vec{f}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, $\dfrac{1}{h(t_0)}\vec{f}\,'(t_0)$ dirige la tangente.

2) Si $x'(t)$ ne s'annule pas au voisinage de t_0 :, on peut étudier $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$, alors $\vec{i} + \alpha\vec{j}$ dirige la tangente.
   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\infty$, alors on a une tangente verticale.

3) Si $\vec{f}$ est n fois dérivable en t_0, alors la tangente est dirigée par le premier vecteur $\vec{f}^{(k)}(t_0)$ non nul.

d. <u>Branches infinies</u> :

<u>Définition</u> :

> La courbe associée à une fonction $t \mapsto \vec{f}(t)$ admet une <u>branche infinie</u> s'il existe t_0 (éventuellement infini) tel que $\lim\limits_{t \to t_0} \left\|\vec{f}(t)\right\| = +\infty$.

Plusieurs cas de figure se présentent :

1) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$: la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$.

2) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$: la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$.

3) $\begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty \end{cases}$: on étudie alors $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$.

- Si cette limite est infinie, on dit qu'il y a une branche parabolique (de direction verticale).

- Si cette limite vaut $a \in \mathbb{R}$ alors on dit qu'il y a une direction asymptotique $y = ax$ (ou branche parabolique de direction $y = ax$, horizontale si $a = 0$).
- Si $\lim\limits_{t \to t_0} \left[y(t) - ax(t) \right] = b \in \mathbb{R}$, alors la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.

III-3. Etude locale en un point

a. Introduction :

On suppose ici que $\vec{f}$ est de classe C^n au voisinage de t_0 avec $n \geq 2$ et que :

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \vec{f}(t_0+h) - \vec{f}(t_0) = h^p P(h) \frac{\vec{f}^{(p)}(t_0)}{p!} + h^q \frac{\vec{f}^{(q)}(t_0)}{q!} + \vec{o}(h^q).$$

Avec $1 \leq p < q \leq n$, P une fonction polynôme en h (pour $p \leq k \leq q-1$, $\vec{f}^{(k)}(t_0)$ est colinéaire à $\vec{f}^{(p)}(t_0)$) et $\vec{f}^{(k)}(t_0)$ et $\vec{f}^{(p)}(t_0)$ non est colinéaires. On a :

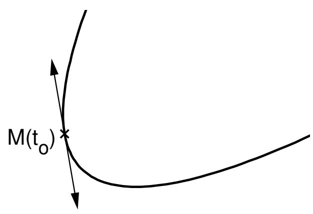
$$\left[x(t_0+h) - x(t_0) \right] y^{(p)}(t_0) - \left[y(t_0+h) - y(t_0) \right] x^{(p)}(t_0) = \frac{h^q \delta}{q!} + o(h^q)$$

avec $\delta = \det\left(\vec{f}^{(p)}(t_0), \vec{f}^{(q)}(t_0) \right) \neq 0$.

b. Cas d'un point régulier :

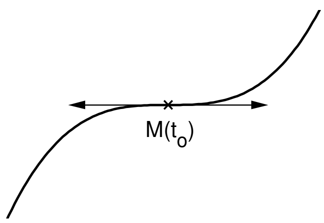
La courbe admet une tangente dirigée par $\vec{f}\,'(t_0)$.

***q* pair**



Point normal *ou* ordinaire

***q* impair**

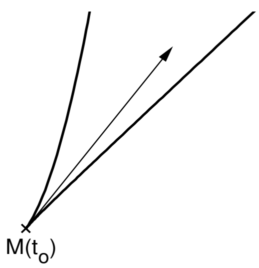


Point d'inflexion

c. Cas d'un point stationnaire :

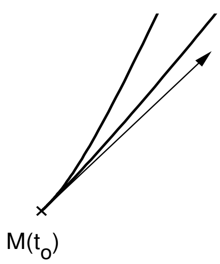
La courbe admet une tangente dirigée par $\vec{f}^{(p)}(t_0)$.

***p* pair et *q* impair**

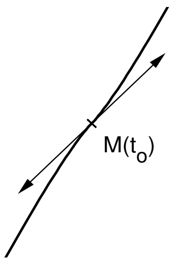
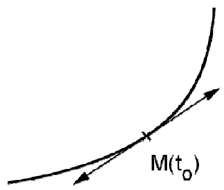


Point de rebroussement de 1ère espèce

***p* pair et *q* pair**



Point de rebroussement de 2ème espèce

***p* impair et *q* impair**	***p* impair et *q* pair**
 <u>Point d'inflexion</u>	 <u>Point ordinaire</u>

III-4. <u>Longueur d'un arc paramétré</u>

<u>Définition</u> :

Si $t \mapsto \vec{f}(t)$ est de classe C^1, la <u>longueur de l'arc</u> associé à $\vec{f}$ entre $t = t_1$ et $t = t_2$ avec $t_1 \le t_2$ est le réel :

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \vec{f}\,'(u) \right\| du \,.$$