TD du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle

Exercice 1

1) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$ c. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln t)^b}$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

d. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right]dx$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ e. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,dx$

f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ g. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ h. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\,dx$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$ et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 2

Convergence, éventuellement suivant la valeur du ou des paramètre(s), et calcul de :

a. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^2}\,dt$ b. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^3}$ c. $\displaystyle\int_0^1\frac{x\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{t}+a\sqrt{t+1}+b\sqrt{t+2}\right)dt$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ f. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}}$ $(a\in\mathbb{R})$

g. $\displaystyle\int_0^1 t\left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor dt$ h. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ i. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$

j. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$ où $0<a<b$ et f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

k. $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt$. ☺ *Montrer que* $\displaystyle\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt$ *, puis justifier que* $\displaystyle\frac{x}{t\ln t}\le\frac{1}{\ln t}\le\frac{x^2}{t\ln t}$ *pour* $t\in[x^2,x]$.

Exercice 3

Dans chaque cas suivant, justifier que F est définie sur D et déterminer un équivalent simple de F en a.

1) $F : x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^3+x^2}$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=+\infty$.

2) $F : x\mapsto\displaystyle\int_x^1\frac{dt}{(\arctan t)^2}$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=0$.

☺ *On pourra montrer que* $f : t\mapsto\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{(\arctan t)^2}$ *est intégrable sur* $]0,1]$.

3) $F : x\mapsto e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t^2}\,dt$, $D=\mathbb{R}$ et $a=+\infty$.

4) $F : x\mapsto\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt$, $D=\mathbb{R}_+^*$ et $a=0$.

Exercice 4

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt = 0$.
2) On suppose ici que f est continue en 0. Montrer $\lim\limits_{x\to 0} x\int_x^1 \dfrac{f(t)}{t^2}dt = f(0)$.
3) On suppose ici que f est à images dans $\mathbb{R}$ et décroissante. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

   ☺ *On pourra utiliser* $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.
4) On suppose ici que f est continue sur $[1,+\infty[$. On pose $u(x) = \dfrac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt$ et $v(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

   Montrer que u et v sont intégrables sur $[1,+\infty[$ et que $\int_1^{+\infty} u = \int_1^{+\infty} v$.

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(E): y' - y = \ln x$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Existe-t-il des solutions bornées ?

Exercice 6

Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right).$$

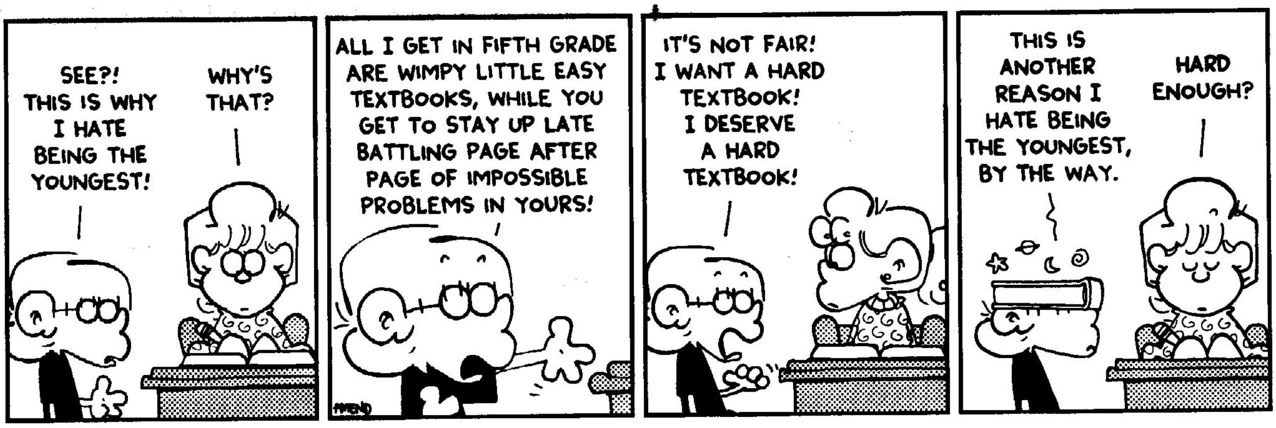
☺ *On pourra prouver que* $\lim\limits_{-\infty} f'f = \lim\limits_{+\infty} f'f = 0$.

Exercice 7

Soit $f \in C(]0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

1) On prend ici $f(x) = \ln x$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$?
2) On suppose ici que f est monotone, que $\int_0^1 f(t)dt$ converge et $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 0$.

   Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t)dt$.



Exercice 8 (Mines)

Soit l'équation différentielle :

$$(E): \quad y'' - e^x y = 0 .$$

On considère *f* une solution non nulle de (*E*) sur $\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que *f* s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose que $f(0) = f'(0) = 1$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq x+1$.

3) On pose $g(x) = f(x)\int_x^{+\infty} \frac{dt}{f(t)^2}$.

   Montrer que *g* est définie sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle y est de classe C^2, solution de (*E*) et bornée.

Exercice 9 (Centrale)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)} dx$.

On pose, pour tout $x \in \,]0,1[$, $f(x) = -\frac{x}{\ln(1-x)}$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

1) Prouver que *f* est continue, positive et décroissante sur $[0,1]$.

2) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et l'étudier.

3) Déterminer un équivalent simple de I_n.

   ☺ *Pour* $n \geq 3$, *on pourra poser* $a_n = 1 - \frac{\ln n}{n+1}$ *et* $b_n = 1 - \frac{1}{(n+1)\ln n}$, *et écrire* :

$$-I_n = \int_0^{a_n} x^n f(x)dx + \int_{a_n}^{b_n} x^n f(x)dx + \int_{b_n}^{1} x^n f(x)dx .$$

4) Déterminer la nature de $\sum I_n$.