TD du chapitre 3 : Limites et continuité

Sauf mention contraire, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\|x\|} x$ est continue sur *E*, bijective de *E* dans la boule ouverte $B(0,1)$ et que sa réciproque est continue. On dit que *f* définit un *homéomorphisme* de *E* dans $B(0,1)$.

Exercice 2

On prend ici $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $\|f\| = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}\,;\, f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est continue.

Exercice 3

Soient $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}\,;\,(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}\,;\,(x, y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

1) Montrer que *f* est *g* sont continues sur Ω.
2) Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

Exercice 4

Ici, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et *E* de dimension finie $p > 0$.

Soient *F* est une partie fermée de *E* et *f* une application de *F* dans *F*, lipschitzienne de rapport $\lambda \in\,]0,1[$ pour la norme infinie dans une base $\mathcal{B}$ fixée de *E* (on dit que *f* est *contractante* pour la norme infinie).

On cherche à prouver que *f* possède un unique point fixe dans *F* (c'est un théorème de point fixe).

1) Montrer que si *f* possède un point fixe alors il est unique.
2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *E* définie par $x_0 \in F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et que $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \le \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$.
3) Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on appelle $x_{i,n}$ la $i^{ième}$ coordonnée de x_n dans $\mathcal{B}$.
   Montrer que la série $\sum \left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ est absolument convergente.
4) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur *a* de *E* tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\|x_n - a\|_\infty \le \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda} \lambda^n .$$
5) Montrer que $f(a) = a$. Conclure.

Exercice 5

Soit une application $f : E \to F$ où $(F, \|\cdot\|)$ est un EVN (on note la norme comme celle de *E*).

1) Montrer que *f* est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de toute partie ouverte de *F* est une partie ouverte de *E*.
2) Montrer que *f* est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de *F* est une partie fermée de *E*.
3) On suppose que *f* est continue sur *E*. L'image d'une partie ouverte est-elle ouverte ? L'image d'une partie fermée est-elle fermée ?

Exercice 6

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 7 (*Centrale*)

Soient $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) = \left\{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [0,1]\right\}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| \le \|M - B\|$ où $\|.\|$ est une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Soient $(E, \|\cdot\|)$ et (F, N) deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que l'image par *f* d'une suite bornée de *E* est une suite bornée de *F*. Montrer que *f* est continue sur *E*.

☺ *On pourra montrer qu'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in E$, $N\big(f(x)\big) \le k\|x\|$.

Exercice 9 (*Centrale - MP*)

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $E_p = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P(M) = 0_n\right\}$. On utilisera une norme quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On étudie les éléments isolés de E_p, c'est-à-dire les matrices *M* de E_p pour lesquelles il existe $r > 0$ tel que $B(M,r) \cap E_p = \{M\}$.

1) Déterminer E_p et étudier les éléments isolés pour $n = 1$.

2) Montrer, dans le cas général, qu'il existe une boule ouverte B_0 de centre 0_n telle que $I_n + H$ soit inversible pour tout $H \in B_0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Construire une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers λI_n et telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0_n$.

4) Soit M un point isolé de E_p. Montrer qu'il existe une boule ouverte B_1 de centre 0_n telle que pour tout $H \in B_1$, $(I_n + H)M(I_n + H)^{-1} = M$.

5) En déduire que M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis que M est une matrice d'homothétie. Que dire de son rapport en lien avec P ?

6) Montrer, à l'aide de la suite construite dans la question 3, que si λ est racine multiple de P, alors λI_n n'est pas un point isolé de E_p.

7) *Pour les 5/2.* Montrer que si λ est racine simple de P alors λI_n est un point isolé de E_p.

☺ *Raisonner par l'absurde et penser aux valeurs propres.*